

$$\int_{-1}^1 p'(x)q'(x) dx + p(3)q(3),$$

Consideriamo $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ = polinomi di grado ≤ 2

Definiamo $\langle p(x), q(x) \rangle$ come sopra.

① Verificare che è un prod. scalare

→ è simmetrico

→ $\langle a p(x), q(x) \rangle = a \langle p(x), q(x) \rangle$

→ $\langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle = \langle p_1(x), q(x) \rangle + \langle p_2(x), q(x) \rangle$

② Scrivere la sua matrice rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2\}$

$$\langle 1, 1 \rangle = 1$$

$$\langle 1, x \rangle = 3$$

$$\langle 1, x^2 \rangle = 9$$

$$\langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 1 dx + 9 = 11$$

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 2x dx + 27 = 27$$

$$\langle x^2, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 4x^2 dx + 81 = \frac{4}{3} [x^3]_{-1}^1 + 81 = \frac{8}{3} + 81$$

$$\int_{-1}^1 p' \cdot q' dx + p(3)q(3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 11 & 27 \\ 9 & 27 & \frac{251}{3} \end{pmatrix} = B$$

Nota bene: se devo fare $\langle a_1 + b_1x + c_1x^2, a_2 + b_2x + c_2x^2 \rangle$, basta calcolare

$$(a_1, b_1, c_1) B \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

③ Determinare una base Sylvestrizzante

Intanto occorre calcolare la segnatura, ad esempio con Sylvester 1-2-3

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = 2$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = \text{supponiamo venga } > 0$$

$$\begin{array}{c} + + + + \\ \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \\ P \quad P \quad P \end{array} = + + +$$

↑
controllare con un programma

A quel punto basta ortonormalizzare la base canonica con GS.

— 0 — 0 —

$$\boxed{AB},$$

$$\boxed{AB + BA},$$

$$\text{Tr}(AB),$$

$$\text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B),$$

$$\text{Tr}(A^t B),$$

$$\text{Tr}(AB^t),$$

NON HANNO SENSO

Quali di queste espressioni definiscano un prod. scalare nello spazio delle matrici 2×2 .

$$\text{Esaminiamo } \langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$$

Non è per niente ovvio che sia simmetrica.

Cento bovino

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & * \\ * & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{pmatrix}$$

$\text{Tr}(AB) = a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_4$ e questa è simmetrica, oltre che ovviamente lineare.

Oss. È la stessa di dire che $a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_4$ definisce un prod. scalare in $\mathbb{R}^4$ fra i vettori
 (a_1, a_2, a_3, a_4) (b_1, b_2, b_3, b_4)

Qual è la matrice associata al prod. scalare?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \\ \leftarrow v_4 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la segnatura.

1° modo Sylvester 1-4- e poi va male per forza :)

Vediamo se lo salviamo...

$\text{Det } 4 \times 4 = 1 \cdot (-1) = -1$. Le possibilità sono

+++ -

+ - - -

Il Sylvester 1-4 ci dice che la forma ristretta a

$\text{Span}(v_1, v_4)$

è definita positiva, quindi esiste un s.sp. di dim. 2 in

cui è def. positiva, quindi ci sono almeno due +, quindi

+++ -

2° modo Pensiamo alla forma quadratica e completiamo i □

$$q(x, y, z, w) = x^2 + w^2 + 2yz$$

$$= x^2 + w^2 + \left(y + \frac{1}{2}z\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}z\right)^2$$

da cui la segnatura +++ -.

Trovare una base Sylvestrizzata.

Cerco v t.c. $q(v) < 0$, ad esempio $(x, y, z, w) = (0, -1, 2, 0)$

Questo corrisponde alla matrice

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo l'ortogonale di w_1 . Basicamente risolvo

$$(x, y, z, w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x, y, z, w) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2y - z = 0$$

L'ortogonale di w_1 è

$$\text{Span}((0, 1, +2, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$$

$\underbrace{\quad}_{w_2} \quad \underbrace{\quad}_{w_3} \quad \underbrace{\quad}_{w_4}$

Non mi resta che ortogonalizzare w_2, w_3, w_4 , ad esempio con GS. In questo caso fortunato può essere che siano già ortogonali. Se lo sono, abbiamo una base ortogonale

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando questa base la matrice associata diventa

$$\begin{pmatrix} \text{neg} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{pos} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{pos} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{pos} \end{pmatrix}$$

— 0 —

Dividendo per numeri opportuni possiamo avere
 $\text{neg} = -1$
 $\text{pos} = 1$

$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B)$ è un prod. scalare

S1 $\rightarrow$ simmetrico

$\rightarrow$ lineare nelle due variabili

Espressione

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = (a_1 + a_4)(b_1 + b_4) = a_1 b_1 + a_4 b_4 + a_1 b_4 + a_4 b_1$$

Matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segnatura Gli autovalori sono 0, 0, 0, 2

($\text{rank} = 1 \Rightarrow \dim(\ker) = 3 \Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore con $\text{mg}(0) = 3$ e poi $\text{Tr} = 2$)

Potremmo anche "completare i quadrati"

$$q(x, y, z, w) = x^2 + w^2 + 2xw = (x+w)^2$$

Base Spazializzante

In questo caso possiamo anche usare gli autovettori

$$(0, 1, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1, 0)$$

$$(1, 0, 0, -1)$$

$$(1, 0, 0, 1)$$

A questo punto basta riscriverli come matrici.

$$\begin{matrix} & 0 & & 0 & \\ - & 0 & - & 0 & - \end{matrix}$$