

- (a) verificare che è definito positivo,
 (b) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base
 $\{(-1, 2, 0), (3, 0, -2), (1, 1, 1)\}$,
 (c) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1, 1, 3)$,
 (d) determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, del sottospazio di equazione cartesiana $x = 3y - z$,
 (e) determinare un vettore a coordinate intere ortogonale a $(1, 0, 0)$ e a $(0, 1, 1)$,
 (f) determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 0)$ sul sottospazio generato da $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$,
 (g) determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$,
 (h) determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione sul sottospazio di equazione cartesiana $y + z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Sylvester 1-2-3

$$\text{Det } 1 \times 1 = 3$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = 8$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = 27 - 3 - 3 = 21$$

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \cup & \cup & \cup \\ p & p & p \\ + & + & + \end{array}$$

(b) Per esercizio fare bivio. In alternativa $M^t B M$ con

$$M = \text{matrice cambio base} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Ortogonale di $\text{Span}((-1, 1, 3))$

$$(-1, 1, 3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(-2, 5, 10) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$-2x + 5y + 10z = 0$$

s.sp. di dim. 2

(d) $x = 3y - z$

$$\text{Span} \left(\underset{\vec{v}_1}{(3, 1, 0)}, \underset{\vec{v}_2}{(1, 0, -1)} \right)$$

Prendo $\hat{v}_1 = v_1$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle \hat{v}_2, v_2 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 = \text{continuo}$$

si calcolano usando la matrice B

Alternativa bovina: Prendo $\hat{u}_1 = u_1$ e cerco $\hat{u}_2 = (x, y, z)$ imponendo due cose

$$\begin{cases} x = 3y - z & (\hat{u}_2 \in \text{piano}) \\ \langle u_1, \hat{u}_2 \rangle = 0 & \leadsto \text{nuova equazione in } x, y, z \\ \leadsto \text{risolvo il sistema} \end{cases}$$

[Fare nei due modi e vedere che viene lo stesso, o un multiplo]

(e) Det. vettore a coord. intere ortogonale a $\underset{\hat{u}_1}{(1, 0, 0)}$ e $\underset{\hat{u}_2}{(0, 1, 1)}$

1° modo Pongo $u = (x, y, z)$ e impongo le due equazioni

$$\begin{cases} \langle (x, y, z), (1, 0, 0) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle = 0 \end{cases}$$

$\leadsto$ risolvo il sistema

2° modo Aggiungo un vettore in modo da avere una base, ad esempio $u_3 = (0, 0, 1)$

e poi applico GS ottenendo

$\underbrace{\hat{u}_1, \hat{u}_2}_{\text{generano il piano}}, \hat{u}_3$
 $\uparrow$ ortogonale ai precedenti

(f) Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0)$ su $\text{Span}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$

Determino una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, che chiamiamo u_1, u_2, u_3 tale che $\text{Span}(u_1, u_2) = \text{Span}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$

(basta fare GS a partire da $(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)$)

A quel punto scrivo

$$(1, 0, 0) = \boxed{a u_1 + b u_2} + c u_3$$

proiezione che
cerco

(g) Praticamente risolto
facendo (f).

Esercizio

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1y_2 + z_2y_1,$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1y_2 + z_2y_1 + 5z_1z_2,$$

$$x_1y_1,$$

NO

$$x_1x_2,$$

SI

$$x_1y_2,$$

NO

$$x_1y_2 + x_2y_1,$$

SI

$$x_1x_2 + y_1y_2,$$

$$x_1y_1 + x_2y_2,$$

FOLLA

Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ con vettori $v = (x_1, y_1, z_1)$

$$w = (x_2, y_2, z_2)$$

Domanda: quali espressioni definiscono un prodotto scalare

[Ad esempio quello canonico sarebbe $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$]

$\langle v, w \rangle = x_1y_1$ è una stupidaggine galattica!!

NON è simmetrico (che succede se scambio v e w ?)

NON è lineare $\langle 5v, w \rangle = 25 \langle v, w \rangle$

NON dipende nemmeno da w

$\langle v, w \rangle = x_1x_2$ è un prodotto scalare (simmetrico e lineare)

La sua matrice nella base canonica è

$$(x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2$$

$\langle v, w \rangle = x_1y_2$ NON è simmetrico $\Rightarrow$ NO prod. scalare

$$\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 1$$

$$\langle (0, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle = 0$$

;)

$\langle v, w \rangle = x_1y_2 + x_2y_1$ è un prodotto scalare con matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha segnatura $+ - 0$

La forma quadratica associata è

$$q(x, y, z) = 2xy = \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2}_{\text{---}} - \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2}_{\text{---}}$$

$$p(x)q(x),$$

FOLIA
TOTALE

$$p(0)q(0),$$

OK

$$p(1)q(0),$$

NO SIMM

$$p(0)q(1) + p(1)q(0),$$

$$p'(0)q'(0),$$

Moltiplicare le
secondo componenti

Quali sono prodotti scalari tra $p(x)$ e $q(x)$ in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) = a_1 a_2$$

$$a_1 a_2$$

↑

$$p(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$$

$$(a_1, b_1, c_1)$$

$$q(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$$

$$(a_2, b_2, c_2)$$

Equivale a moltiplicare le prime due componenti

La sua matrice nella base $\{1, x, x^2\}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix}$$

$$1 \quad x \quad x^2$$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(1) + q(0)p(1)$$

$$\begin{aligned} \langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \rangle &= a_1(a_2 + b_2 + c_2) + a_2(a_1 + b_1 + c_1) \\ &= 2a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 c_2 + a_2 c_1 \end{aligned}$$

Matrice associata

$$(a_1, b_1, c_1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \text{espressione data}$$

Segnatura: 0 + -

← [Connetti dopo video]

Esercizio: scrivere $q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2xz$ come differenza di due quadratici.