

Ricapitolazione teoria sui prod. scalari

INPUT: 2 vettori OUTPUT: numero $x \in V$ $y \in V$ $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$

Proprietà: $\rightarrow$ simmetrico $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
 $\rightarrow$ Bilineare (cioè lineare rispetto alle 2 variabili)

I prodotti scalari si rappresentano con matrici simmetriche, costruite con un'altra versione della battaglia navale

Data una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ di V costruisco la matrice B tale che

$$B_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Se cambio base, come cambia la matrice?

Se $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ è una nuova base, e M è la matrice di cambio base dalla nuova alla vecchia allora

$$\hat{B} = M^t B M$$

$\rightarrow$ Due matrici B e $\hat{B}$ legate da questa relazione, con M invertibile, si dicono CONGRUENTI

Se conosco la matrice B , come calcolo $\langle x, y \rangle$?

Risposta

$$\langle x, y \rangle = y^t B x$$

(le dimensioni sono compatibili)

$$y^t B x = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trasposto di} \\ \text{un numero}}}{(y^t B x)^t} = x^t \underset{\substack{\uparrow \\ B^t = B}}{B^t} y = x^t B y$$

Domanda: data una matrice B simmetrica, quanto può diventare bella $\hat{B}$ scegliendo bene M ?

Risposta: può diventare diagonale, con sulla diagonale solo $0, 1, -1$
(SYLVESTERIZZAZIONE)

$m_0 \uparrow m_+ \uparrow m_- \uparrow$

— 0 — 0 —

Esempi

- (a) determinare se è definito positivo oppure no,
- (b) determinare il prodotto scalare tra i vettori $(1, 2)$ e $(3, -1)$,
- (c) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base $\{(-1, 2), (3, -2)\}$ (si consiglia per le prime volte di svolgere questo punto sia direttamente con la definizione, sia con il cambio di base),
- (d) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1, 1)$,
- (e) determinare un vettore ortogonale al sottospazio di equazione cartesiana $x + 2y = 0$,
- (f) determinare una base "Sylvesterizzante".

Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (a) $\text{Det} = 10 - 9 = 1 \quad ++ \quad --$
 $\text{Tr} = 7 \rightsquigarrow \boxed{++} \quad \text{Def. pos.}$

(b) $y^t B x \quad (1, 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (1, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 8 = 11$
 $(8, 13) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 24 - 13 = 11 \quad \text{!}$

(c) BOVINO $u_1 = (-1, 2) \quad u_2 = (3, -2)$

$\langle u_1, u_1 \rangle$

$\langle u_2, u_2 \rangle$

$\langle u_1, u_2 \rangle$

$\langle u_1, u_1 \rangle = (-1, 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1, 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 10$

$\langle u_2, u_2 \rangle = (3, -2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (0, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2$

$\langle u_1, u_2 \rangle = (3, -2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$

$\hat{B} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{matrix}$

(c) CON CAMBIO BASE

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dalla $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$ alla canonica

$$\hat{B} = M^t B M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

(d) vettori ortogonali a $(-1, 1)$

$$\underbrace{(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\langle (x,y), (-1,1) \rangle} = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{x+2y=0}$$

(e) Determinare un vettore ortogonale al sottospazio di equazione cartesiana $2x-5y=0$ (variante rispetto al testo)

Chi spanna il sottospazio? $(5, 2)$

Cerco qualcuno ortogonale a $(5, 2)$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix} = 16x + 25y = 0$$

↑
potrei scambiare!

Ad esempio $(25, -16)$

[Verifica: calcolare $\langle (25, -16), (5, 2) \rangle = 0$]

(f) Determinare base Sylvesterizzata.

Devo arrivare ad avere

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$$

$$n_+ = 2, \quad n_- = n_0 = 0$$

Se usassi $v_1 = (25, -16)$ $v_2 = (5, 2)$ sicuramente avrei gli 0 fuori dalla diagonale

Calcolo

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1 \rangle &= (25, -16) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ -16 \end{pmatrix} \\ &= (25, -16) \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 50 + 80 = 130\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle v_2, v_2 \rangle &= (5, 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (5, 2) \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix} = 130\end{aligned}$$

Base ortonormalizzata è

$$v_1 = \left(\frac{25}{\sqrt{130}}, \frac{-16}{\sqrt{130}} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{5}{\sqrt{130}}, \frac{2}{\sqrt{130}} \right)$$

Verifica brutta: $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 1$ e $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Verifica un po' più raffinata: $M = \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -16 & 2 \end{pmatrix}$, allora

$$M^t \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternativa per punto (f). Parto da una base qualunque

$$(1, 0)$$

$$(0, 1)$$

Mi tengo il primo e modifico il secondo in modo che sia ortogonale al primo

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2x + 3y = 0$$

Quindi posso prendere $(-3, 2)$. A questo punto basta dividere entrambi per il numero giusto.

In ulteriore alternativa, posso usare la versione di GS con il nuovo prodotto scalare, cioè

$$\text{nuovo } v_2 = (0,1) - \frac{\langle (0,1), (1,0) \rangle}{\langle (1,0), (1,0) \rangle} (1,0) = (0,1) - \frac{3}{2} (1,0)$$

$$v_2 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \boxed{\left(-\frac{3}{2}, 1\right)} \text{ multiplo di prima}$$

$$\langle (0,1), (1,0) \rangle = (0,1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\langle (1,0), (1,0) \rangle = 2$$

— 0 — 0 —