

$$y^2 + 7xz$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sylvester non funziona

Devo partire con 2 e poi non so come proseguire

$$\text{Det } 3 \times 3 = -\frac{49}{4} < 0$$

Autovalori:

$$\begin{matrix} - & - & - \\ + & + & - \end{matrix}$$

NO perché $\text{Tr} = 1$

Completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} y^2 + 7xz &= y^2 + (x+az)^2 - (x-az)^2 \\ &= y^2 + 4axz \quad \leadsto a = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$y^2 + \left(x + \frac{7}{4}z\right)^2 - \left(x - \frac{7}{4}z\right)^2$$

$$- \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$$

$$-y^2 - w^2 - 3xz$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sylvester $4-2-1-3$

$$\text{Det } 1 \times 1 = -1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = 1$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = 0 \quad \leadsto$$

$$\text{Det } 4 \times 4 = -1 \cdot \left(+\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4} < 0$$

↑
Laplace
4ª riga

$$\text{Autovalori: } \begin{matrix} + & + & + & - \\ + & - & - & - \end{matrix}$$

autovari compatibili con la traccia

$$\begin{aligned} \text{Completiamo i quadrati: } & -y^2 - w^2 + (x+az)^2 - (x-az)^2 \\ & -y^2 - w^2 + 4axz \quad \leadsto a = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Oss. Consideriamo $W = \text{Span}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$
 $= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x=0, z=0\}$

Su questo sottospazio q è definita negativa.

Quindi c'è un s.s.p. di dim 2 su cui q è def. neg., quindi

$n \geq 2$, quindi $+++$ - non va bene.

$$\begin{aligned} xy - 3zw &= (x+ay)^2 - (x-ay)^2 - 3zw \\ &= 4axy - 3zw \quad \leadsto a = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$= (x + \frac{1}{4}y)^2 - (x - \frac{1}{4}y)^2 + (z + aw)^2 - (z - aw)^2$$

$$= \quad \quad \quad + 4azw \quad \rightsquigarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{4}y\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}y\right)^2 + \left(z - \frac{3}{4}w\right)^2 - \left(z + \frac{3}{4}w\right)^2$$

Segnatura: ++ --

Si poteva vedere dalla matrice?

0	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	0	0	$\frac{1}{2}$

$$\text{Det} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{16} > 0$$

$\begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ + & + & - & - \end{array}$

↗ Neu daneben
 $\text{Tr} = 0$

— 0 — 0 —

Consideriamo le seguenti forme quadratiche $q(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$:

$$x^2 + 2y^2 + axy, \quad x^2 + ay^2 + 5xy, \quad ax^2 - 2axy - 3y^2, \quad -y^2 + axy.$$

Determinare, per ciascuna di esse, per quali valori del parametro reale a risulta

- (a) definita positiva,
(b) indefinita,
(c) nulla sul sottospazio $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 0\}$,
(d) definita positiva sul sottospazio V di cui al punto precedente.

Determinare la segnatura al variare del parametro

$$q(x,y) = x^2 + 2y^2 + axy \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 2 - \frac{a^2}{4} = \frac{8-a^2}{4}$$

- $\text{Det} > 0 \Leftrightarrow 8-a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

In questo caso ++ (perché $\text{Det} > 0$ e $\text{Tr} > 0$)

- $\text{Det} < 0 \Leftrightarrow a < -2\sqrt{2}$ oppure $a > 2\sqrt{2}$

In questo caso +- ($\text{Det} < 0$)

- $\text{Det} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$

In questo caso +0 (gli autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$)

$$q(x,y) = x^2 + ay^2 + 5xy \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} = a+1 \quad \text{Det} = a - \frac{25}{4}$$



- Se $a > \frac{25}{4}$, allora $\text{Det} > 0$ e $\text{Tr} > 0 \leadsto ++$

- Se $a = \frac{25}{4}$, allora $\text{Det} = 0$ e $\text{Tr} > 0 \leadsto +0$

- Se $a < \frac{25}{4}$, allora $\text{Det} < 0 \leadsto +-$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma $x^2 + ay^2 + 5xy$ è nulla sul s.sp. di eq. $x+3y=0$

Il s.sp. è $\text{Span}((-3,1))$ quindi deve essere $q(-3,1)=0$

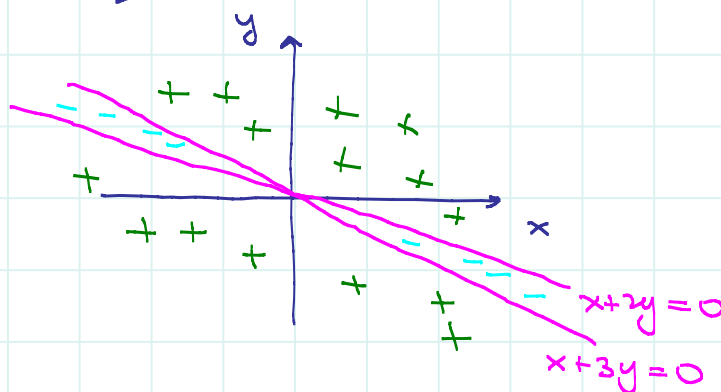
$$q(-3,1) = 9 + a - 15 = 0 \quad \leadsto \quad a = 6$$

Vediamo cosa succede in questo caso:

$$\begin{aligned} x^2 + 6y^2 + 5xy &= x^2 + 5xy + \frac{25}{4}y^2 - \frac{25}{4}y^2 + 6y^2 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{aligned}$$

Vediamo dove si annulla: $x + \frac{5}{2}y = \pm \frac{1}{2}y$

$$x + 2y = 0 \quad x + 3y = 0$$



— 0 — 0 —

2. Consideriamo le seguenti forme quadratiche $q(x,y,z)$ in $\mathbb{R}^3$:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + axz, \quad x^2 + ay^2 + 3z^2 + 6xy - yz, \quad y^2 + axz - 4ayz.$$

Determinare, per ciascuna di esse, per quali valori del parametro reale a risulta

- (a) definita positiva, $\rightarrow$ segnatura $+++$
- (b) indefinita, $\rightarrow$ almeno un $+$ e almeno un $-$
- (c) indefinita, ma definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 2, $\rightarrow$ segnatura $+--$
- (d) nulla su almeno un sottospazio di dimensione 2, $\rightarrow$ più delicato (o due zeri oppure $+ - 0$)

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + axz$$

Studio della segnatura al variare del parametro a

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{\frac{a}{2}} \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sylvester 1-2-3

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = 2$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = 6 - \frac{a^2}{2} = \frac{12 - a^2}{2}$$

$$\bullet \text{ Det } 3 \times 3 > 0 \Leftrightarrow 12 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < 12 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

In questo caso $\underbrace{+++}_{PPP}$, quindi segnatura $+++$

$$\bullet \text{ Det } 3 \times 3 < 0 \Leftrightarrow a < -2\sqrt{3} \text{ oppure } a > 2\sqrt{3}$$

I segni in Sylvester sono $\underbrace{+++-}_{PPV}$, quindi segnatura $++-$

$$\bullet \text{ Det } 3 \times 3 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{3}. \text{ In questo caso ovviamente c'è l'autovettore nullo. C'è anche un autovettore positivo almeno perché } \text{Tr} = 6 > 0. \text{ Il segno dell'altro in questo momento non è prevedibile.}$$

Ci sono due modi per determinarlo

→ calcolare esplicitamente gli autovettori (una radice è $\lambda=0$, quindi resta eq. di 2° grado)

→ osservare che q è def. positiva in

$$\text{Span}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$$

oppure in

$$\text{Span}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

quindi almeno 2 segni $+$ ci sono, quindi la segnatura è $++0$.

$$- \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$$