

Cartesio Sia $p(x)$ il pol. caratteristico di una matrice simmetrica $n \times n$ (quindi per forza ha n radici reali). Allora

- il numero di radici nulle è il più piccolo esponente di x che compare nel polinomio (se c'è il termine noto, conta come x^0)
- il numero di radici positive è il numero di variazioni di segno tra i coeff.
- il numero di radici negative si ottiene per differenza.

Esempio $p(x) = x^8 - 5x^6 + x^3$

- le radici nulle sono 3 ($x=0$ è radice di mult. 3)
(posso raccogliere x^3 al massimo)
- le radici positive sono 2, perché i coeff. sono $+ - +$
- le radici negative sono 3.

Oss. Il metodo funziona se si sa A PRIORI che le radici sono tutte reali (nell'esempio non era garantito).

Oss. Cartesio aiuta a trovare la segnatura senza risolvere il pol. caratteristico.

SYLVESTER

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Calcolo i det. a partire da in alto

a $5 \times$

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = -7$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = -3 - 3 - 2 - 1 = -9$$

$+ - -$

$+ + - -$
 $\downarrow \downarrow \downarrow$
 $P V P$

→ scrivo di fila i segni

→ aggiungo un $+$ a sinistra

→ n_+ = numero permanenze, n_- = numero variazioni

Oss. Sylvester richiede che non ci siano $\det = 0$ on the road
(in particolare non funziona così come descritto se 0 è
autovalore).

Oss. Per ricordare la procedura, basta pensare al caso di una
matrice diagonale (aggiungendo un autovalore, se questo è
positivo il segno non cambia, se è negativo cambia)

Quello che ho descritto è Sylvester 1-2-3



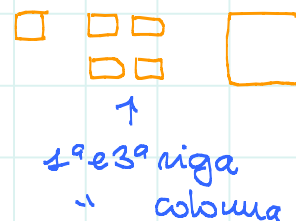
Posso fare Sylvester 3-2-1



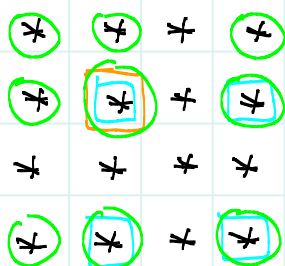
Sylvester 2-3-1



Sylvester 1-3-2



Caso 4×4 Sylvester 2-4-1-3

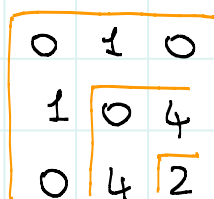


Det 1×1

Det 2×2

Det 2×2

Tutta la matrice



Det $1 \times 1 = 2$

Det $2 \times 2 = -16$

Det $3 \times 3 = -2$

$\begin{matrix} + & + & - & - \\ \cup & \cup & \cup & \\ p & v & p & \end{matrix}$

La segnatura è $++-$

La forma quadratica associata sarebbe

$$q(x, y, z) = 2z^2 + 8yz + 2xy$$

Proviamo a completare i quadrati

$$2(z^2 + 4yz + 4y^2 - 4y^2) + 2xy = 2(2y+z)^2 - 8y^2 + 2xy$$

$$= 2(2y+z)^2 - 2(4y^2 - xy)$$

$$= 2(2y+z)^2 - 2\left(4y^2 - 2 \cdot 2y \cdot \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{16}\right)$$

$$= 2(2y+z)^2 - 2\left(2y - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{8}$$

$$= \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + [\sqrt{2}(2y+z)]^2 - [\sqrt{2}\left(2y - \frac{x}{4}\right)]^2$$

Due quadrati con il segno +, uno con il segno -.

Esempi

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz + 3xz$$

$$-y^2 + z^2 + xy - yz$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = \cancel{1} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} - \cancel{1} \\ = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\begin{matrix} + & + & + \\ \cup & \cup & \cup \\ P & P & P \end{matrix}$$

Segnatura : + + -

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{matrix} + & + & - \\ \cup & \cup & \cup \\ P & P & P \end{matrix}$$

Segnatura : + + -

Per esercizio facciamo il 2° completando i quadrati

$$\begin{aligned} -y^2 + z^2 + xy - yz &= z^2 - yz - y^2 + xy \\ &= z^2 - yz + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} - y^2 + xy \\ &= \left(z - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}y^2 + xy \\ &= \left(z - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}\left(y^2 - \frac{4}{5}xy\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}\left(y^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{25}x^2\right) \\ &\quad \quad \quad 2y \cdot \frac{2}{5}x \\ &= \left(z - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}\left(y - \frac{2}{5}x\right)^2 + \frac{1}{5}x^2 \end{aligned}$$

Come previsto, due segni + e un segno -.

Trovare un s.sp. di dim. max su cui q è def. neg.

La max dim. è 1 e basta annullare i termini positivi, quindi

$$\begin{cases} z - \frac{1}{2}y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{Span}((0, 2, 1))$$

— 0 —

$$xy - 2yz + 3xz$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Non c'è una partenza per Sylvester.

$$\text{Det} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

Autovalori = $\begin{matrix} \diagup & \text{---} & \diagdown \end{matrix} \rightsquigarrow \text{Tr sarebbe } < 0$
 $\boxed{++-}$ ← segnatura

Come completare i quadrati?

$$xy - 2yz + 3xz$$

Al primo passaggio eliminiamo tutte le x e tutte le y

$$(x + \underset{\uparrow}{a}y + bz)^2 - (x - \underset{\uparrow\uparrow}{a}y + cz)^2 =$$

$$= \cancel{x^2} + \cancel{a^2}y^2 + b^2z^2 + 2axy + 2bxz + 2abyz \\ - \cancel{x^2} - \cancel{a^2}y^2 - c^2z^2 + 2axy - 2cxz + 2acyz$$

$$= (b^2 - c^2)z^2 + 4axy + 2(b-c)xz + 2a(b+c)yz$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2(b-c) = 3 \\ 2a(b+c) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b-c = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(b+c) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} b-c = \frac{3}{2} \\ b+c = -4 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2b &= -\frac{5}{2} & b &= -\frac{5}{4} \\ c &= -4 - b = \\ &= -4 + \frac{5}{4} = -\frac{11}{4} \end{aligned}$$

Conclusione

$$xy - 2yz + 3xz = \left(x + \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}z\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4} - \frac{11}{4}z\right)^2 + \frac{121-25}{16}z^2$$

[fare verifica!]

— o — o —