

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prima matrice: triangolare $\leadsto$ autovalori 1, 1, 2, 3
 $\leadsto$ diag. $\Leftrightarrow m_g(1) = 2$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 $\text{Det} \neq 0$

$\leadsto \text{rank} = 3 \leadsto \dim(\ker) = 1$
 $\leadsto m_g(1) = 1 \leadsto \text{NO DIAG}$
 $\leadsto$ La forma canonica è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio: trovare M di passaggio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bovino puro

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot 1 (1-\lambda) \cdot (-\lambda) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Laplace} \\ &\quad 1^{\text{a}} \text{ riga} \\ &= (-\lambda)(1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1] \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1) \\ &= \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Autovalori: $\lambda = 0, 0, 1, 2$

Tutto è deciso da $m_g(0) = \dim(\ker)$
 $= 4 - \text{rank} = 1$

$\leadsto \text{NO DIAG.}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$$

→ La forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$

Esercizio: trovare base jordanizzante o la M di passaggio
— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = 1 \Rightarrow \dim(\ker) = 3$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \text{ autovalore con } m_g(0) = 3$$

$$\Rightarrow \text{autovalori sono } 0, 0, 0, 13$$

↑
Traccia

$$\Rightarrow \text{Diagonalizzabile } \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 13 \end{pmatrix}$$

$$M \text{ di passaggio: } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑
base di ker

↑
tizio che va in 13
volte se stesso

Fare la verifica che

$$M^{-1} A M = \text{Diagonale}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Barra più

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)+10]$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 10$$

$$= (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 4\lambda + 13)$$

↑

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

Autovalori: $\lambda = 1, 1, 2+3i, 2-3i$

Calcoliamo $\text{mg}(1)$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leadsto \text{rank} = 3 \\ \leadsto \text{mg}(1) = 1 \\ \leadsto \text{NO diag.} \end{array}$$

$\det = 10$

Forma canonica e

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

su $\mathbb{C}$

Come trovare la base per quella reale?

$$Av_1 = v_1 \leadsto \text{autovettore di } \lambda = 1$$

$$Av_2 = v_2 + v_1 \leadsto v_2 = (x, y, z, w) \leadsto \text{risolvo il sistema}$$

Per trovare v_3 e v_4 basta risolvere in $\mathbb{C}$

$$Av = (2+3i)v \quad (\text{autovettore di } \lambda = 2+3i)$$

A questo punto v_3 e v_4 sono parte reale e parte immaginaria di v .

[Fare tutte le verifiche per esercizio]

$$A \rightarrow A + 3A^t$$

Vista come funzione $f: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$

Forma canonica + base in cui assume la forma canonica

Superbovino

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & b+3c \\ c+3b & 4d \end{pmatrix}$$

[è come se fosse $(x, y, z, w) \rightarrow (4x, y+3z, 3y+z, 4w)$ in $\mathbb{R}^4$

o come se fosse

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \rightarrow 4a + (b+3c)x + (c+3b)x^2 + 4dx^3 \text{ in } \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$$

Mi scrivo la matrice associata ad φ nella base canonica di $M_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

[Da subito si vede che A è simmetrica, quindi diag. di lusso]

Di questa cerco la forma canonica. Bovino puro

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (4-\lambda)(4-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 9] \\ &= (4-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 9) \\ &= (4-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &S=2 \\ &P=-8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (4-\lambda)^2(\lambda-4)(\lambda+2) \\ &= -(4-\lambda)^3(\lambda+2) \end{aligned}$$

Autovalori: $\lambda = -2, 4, 4, 4$

Bisogna calcolare $u_g(4)$

$$A - 4Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = 1 \leadsto \dim(\ker) = 3$$

$$\leadsto u_g(4) = 3$$

$\leadsto$ Diagonalizzabile [e si poteva già sapere dall'inizio]

Forma canonica

$$\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & 0 \\ & & 4 & \\ 0 & & & -2 \end{pmatrix}$$

Trovare una base diagonalizzante

$$\boxed{\lambda=4} \quad \text{Ker}(A-4\text{Id}) = \text{Span}(\underbrace{(1,0,0,0)}_{\vec{v}_1}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{\vec{v}_2}, \underbrace{(0,1,1,0)}_{\vec{v}_3})$$

$$\boxed{\lambda=-2} \quad A+2\text{Id} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ker} = \text{Span}((0,1,-1,0))_{\vec{v}_4}$$

Quando rimuoto le matrici, ottengo la base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_1} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{A_2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{A_3} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{A_4}$$

Verifica mentale: cosa succede quando faccio $A \rightarrow A+3A^t$

$$A_1 \rightarrow 4A_1 \quad A_2 \rightarrow 4A_2 \quad A_3 \rightarrow 4A_3$$

$$A_4 \rightarrow A_4 + 3 \overset{\uparrow}{\underset{-A_4}{A_4^t}} = A_4 - 3A_4 = -2A_4 \quad \text{c'}$$

— o — o —