

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \text{ simile a } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad S=5 \quad \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$P=-2 \quad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2}$$

radici distinte $\Rightarrow$ diag.

Basta che matrice originaria abbia stessa traccia e stesso determinante

$$\leadsto a=3 \quad 6-b=-2 \leadsto b=8$$

[Verifica]

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = 1 \Rightarrow \text{Dim}(\ker) = 2$$

$\uparrow$
autospazio di $\lambda=0$

$$\Rightarrow \lambda=0 \text{ autovalore con } m_\lambda(0)=2$$

$$\text{Ma } \text{Tr} = -6 \Rightarrow \text{autovalori } 0, 0, -6$$

Forma canonica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Autospazio di } 0 = \ker = \text{Span}((1, -1, 0), (0, 1, -1))$$

$$\text{Autospazio di } -6 = \ker(A + 6\text{Id})$$

$$A + 6\text{Id} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & +4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Per trovare un generatore risolvo il sistema

$$5x - y - z = 0$$

$$-2x + 4y - 2z = 0 \quad \leadsto \text{risolve...}$$

$$-x - y + z = 0$$

— 0 — 0 —

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & a \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

Quando è diagonalizzabile?

È triang. superiore, quindi autov. $\lambda = 1, 1, 2$

$$\text{Diagonalizzabile} \Leftrightarrow m_\lambda(1) = 2 = m_\lambda(1)$$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Se $a = 3$, allora $\text{rang} = 1$
 $\leadsto \dim(\ker) = 2 \leadsto \text{mg}(1) = 2$
 $\leadsto$ diagonalizzabile

- Se $a \neq 3$, allora $\text{rang} = 2$
 $\leadsto \dim(\ker) = 1 \leadsto \text{mg}(1) = 1$
 $\leadsto$ NO DIAGONALIZZ.

$\leadsto$ Forma canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Quando sono simili?

La seconda è sempre diagonale

La prima ha autovalori 1, 2, a

- Se $a \neq 1$ e $a \neq 2$, allora la prima è diag., quindi la sua forma canonica è la seconda.
- Se $a = 1$, allora la prima è diag. $\Leftrightarrow \text{mg}(1) = 2$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\leadsto \text{rang} = 2 \leadsto \text{mg}(1) = 1 \leadsto$ NO DIAG
 $\leadsto$ NO simili

- Se $a = 2$, allora la prima è diag. $\Leftrightarrow \text{mg}(2) = 2$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\leadsto \text{rang} = 2 \leadsto \dots \leadsto$ NO DIAG.

In questo caso la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio ulteriore: trovare la M di passaggio.

Consideriamo $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $(x, y, z) \rightarrow (y, z, z)$

Trovare forma canonica e una corrispondente base

Scrivo la matrice di φ tra le basi canoniche

$$\varphi(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\varphi(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$\varphi(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Triangolare superiore $\Rightarrow$ autovalori $\lambda = 0, 0, 1$

Per vedere se è diag. calcolo $\dim(\ker(A)) = 1$

$\Rightarrow$ non è diag. e la forma canonica è $\text{rank} = 2$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come determino una possibile base v_1, v_2, v_3 ?

$$Av_1 = 0 \rightsquigarrow v_1 = (1, 0, 0)$$

$$Av_2 = v_1 \rightsquigarrow \text{risolvo } (y, z, z) = (1, 0, 0) \rightsquigarrow v_2 = (0, 1, 0)$$

$$Av_3 = v_3 \rightsquigarrow \text{risolvo } (y, z, z) = (x, y, z) \rightsquigarrow v_3 = (1, 1, 1)$$

Verifica finale: pongo $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e allora

$$M^{-1}AM = J$$

— 0 — 0 —

Sia $\varphi: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$p(x) \rightarrow (x+2)p'(x)$$

definita dalla formula a lato.

Domanda: forma canonica + base.

Vediamo come agisce sulla base canonica $1, x, x^2$

$$1 \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow x+2$$

$$x^2 \rightarrow 2x^2 + 4x$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \end{matrix}$$

Volevamo poter calcolare la formula generale

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2 &\rightarrow (x+2)(b+2cx) = bx+2cx^2+2b+4cx \\ &= 2b + (b+4c)x + 2cx^2 \end{aligned}$$

Quindi alla fine è come se fosse $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da
 $f(a, b, c) = (2b, b+4c, 2c)$

La forma canonica è diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per trovare v_1, v_2, v_3 basta trovare autovettori di $\lambda = 0, 1, 2$

$\boxed{\lambda=0}$ $\ker(A) = \text{Span}((1, 0, 0))$ e quindi $v_1 = 1$
 $\uparrow$
polinomio

$\boxed{\lambda=1}$ $\ker(A - \text{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Span}((2, 1, 0))$
e quindi $v_2 = 2+x$

$\boxed{\lambda=2}$ $\ker(A - 2\text{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Span}((4, 4, 1))$
e quindi
$$\begin{aligned} v_3 &= 4+4x+x^2 \\ &= (x+2)^2 \end{aligned}$$

Tocchiamo con mano. Usando la formula

$$p(x) \rightarrow (x+2)p'(x)$$

$$v_2 = 2+x \rightarrow x+2 = v_2 \quad (\text{quindi } v_2 \text{ va in se stesso})$$

$$v_3 = (x+2)^2 \rightarrow (x+2) \cdot 2(x+2)$$

$$= 2(x+2)^2 = 2v_3 \quad (\text{quindi } v_3 \text{ va in 2 volte se stesso}).$$

— o — o —