

2. Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$

- (a) è diagonalizzabile sui reali, $\Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$
- (b) è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale, $\Leftrightarrow$ simmetrica $\Leftrightarrow a = 2$
- (c) ha il ker non banale, $\Leftrightarrow \text{rank} \leq 1 \Leftrightarrow \det = 0 \Leftrightarrow 3 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$
- (d) ammette l'autovalore $\lambda = 1$,
- (e) ammette l'autovalore $\lambda = 2 + i$,
- (f) ammette $(1, 5)$ come autovettore,
- (g) non è diagonalizzabile sui complessi.

(a) Diag. sui reali $\Leftrightarrow$ 2 autovalori reali con $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ a & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (1-\lambda)(3-\lambda) - 2a \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2a = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3 + 2a} = 2 \pm \sqrt{1 + 2a}$$

- Se $1 + 2a < 0$, cioè $a < -\frac{1}{2}$, allora autov. no reali $\Rightarrow$ no diag. in $\mathbb{R}$
- Se $1 + 2a > 0$, cioè $a > -\frac{1}{2}$, allora 2 autov. reali DISTINTI $\Rightarrow$ diag. in $\mathbb{R}$
- Se $1 + 2a = 0$, cioè $a = -\frac{1}{2}$, allora c'è $\lambda = 2$ come autovalore di $m_a(2) = 2$. Tutto dipende da $m_g(2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - 2\text{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\ker) = 1$$

$$\Rightarrow m_g(2) = 1$$

$\Rightarrow$ no diag in $\mathbb{R}$

In questo caso la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$ ammette l'autovalore $\lambda = 1$

1° modo Sappiamo che $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2a$. $\lambda = 1$ deve essere soluzione. Allora $1 - 4 + 3 - 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2° modo Se $\lambda=1$ è autovalore, allora l'altro autovalore è $\lambda=3$ (la somma deve fare la traccia). Ma allora

$$\text{Det} = \text{prod. autov.} = 3 \Leftrightarrow 3 - 2a = 3 \leadsto a = 0$$

3° modo (in realtà 1-bis)

$$\lambda=1 \text{ autovalore} \Leftrightarrow \text{Det}(A - \text{Id}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \\ \Leftrightarrow a = 0$$

(e) Ammette autovalore $\lambda = 2+i$

L'altro è $2-i$, quindi $\text{Det} = (2+i)(2-i) = 4 - i^2 = 5$ e da qui si risolve

(f) Ammette $(1,5)$ come autovettore. Impongo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{incognita}}}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1 = \lambda \\ a + 15 = 5\lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} a + 15 = 55 \\ a = 40 \end{array}$$

(g) La matrice è sempre diag. sui complessi, TRANNE se $a = -\frac{1}{2}$, nel qual caso la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{---} \quad 0 \quad \text{---} \quad 0 \quad \text{---}$$

3. Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$

(a) ammette autovalori immaginari puri,

(b) ammette l'autovalore $\lambda = 3 + 5i$, simul., quindi $b=1$

(c) è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale e rappresenta un'applicazione lineare non surgettiva. $\Leftrightarrow \text{Det} = 0 \quad 2a - 1 = 0 \quad a = \frac{1}{2}$

(d) ammette $\lambda = 7$ come autovalore con autovettore corrispondente $(1,1)$,

(e) ammette $\lambda = -1$ come autovalore ma non è diagonalizzabile sui complessi,

(f) è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$(a) \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ b & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad P_A(\lambda) = (a-\lambda)(2-\lambda) - b$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - a\lambda + 2a - b$$

$$= \lambda^2 - (a+2)\lambda + (2a-b) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4(2a-b)}}{2}$$

Immaginari puri $\Leftrightarrow a = -2$ e $\Delta < 0$

$$-4(-4-b) < 0$$

$$\Leftrightarrow 4+b < 0 \Leftrightarrow b < -4$$

$$\boxed{a = -2}$$

$$\boxed{b < -4}$$

Verifica in un caso specifico $a = -2$ $b = -5$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S=0 \quad P=1 \quad \leadsto \lambda = \pm i$$

$$(b) \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Ammette autovalore } 3+5i$$

L'altro è $3-5i$

$$\text{Tr} = 6 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Det} = (3+5i)(3-5i) = 9+25 = 34$$

$\leadsto$ trovo b (verifica!)

In alternativa posso usare la formula per $\lambda_{1,2}$ scritta sopra

$$(d) \text{ Ammette } \lambda = 7 \text{ come autovalore con autovettore } (1, 1)$$

Basino

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$a+1 = 7 \quad a = 6$$

$$b+2 = 7 \quad b = 5$$

$$(e) \lambda = -1 \text{ autovalore, ma No diag. sui complessi}$$

Per forza l'altro autovalore è -1 (altrimenti due autovalori distinti $\Rightarrow$ diagonalizzabile)

$$\text{Quindi autovalori} = -1, -1 \Rightarrow \text{Tr} = -2 \quad \text{Det} = 1$$

$$a = -4 \quad \text{Det} = -8 - b = 1 \quad b = -9$$

Potrebbe ancora essere diagonalizzabile. Dobbiamo verificare
 che $\mu_A(-1) = 2$
 $\mu_g(-1) = 1$

$$(A + Id) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rank } 1$$

$$\rightsquigarrow \dim(\ker) = 1$$

$$\rightsquigarrow \mu_g(-1) = 1 \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 2\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 2) = 0$$

Autovalori: $\lambda = 0, \lambda = \pm\sqrt{2}$. Forma canonica $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 0}$ Autovettore a occhio = $(1, 0, -1)$ ← prima colonna della M
 di passaggio (che volendo
 posso anche fare ortogonale)

$\boxed{\lambda = \sqrt{2}}$ $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Con un po' di pazienza si trova
 un autovettore, ad esempio
 $(1, \sqrt{2}, 1)$ ← seconda colonna

$\boxed{\lambda = -\sqrt{2}}$ $\rightsquigarrow$ stessa cosa $\rightsquigarrow (1, -\sqrt{2}, 1)$

[Verifica]

— 0 — 0 —