

FORMA DI JORDANBlocchi di Jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Matrice di Jordan: unire sulla diagonale dei blocchi di Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

[Il λ sulla diagonale può essere 1 o 0]

il resto sono zeri

Idea: se non riesco a diagonalizzare, magari riesco a jordanizzare.

Fatti fondamentaliPrendiamo una matrice A reale $n \times n$.

Allora

① A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se→ tutti gli n autovalori sono reali→ $m_A(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore λ

(se tutti gli autovalori sono reali e distinti, la seconda richiesta è gratis)

② A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se→ $m_A(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore λ , anche complesso(la prima richiesta è gratis, cioè gli n autovalori in $\mathbb{C}$ ci sono sempre)

- ③ A è diagonalizzabile **DI LUSSO** (cioè da base in cui si scrive come matrice diagonale si può prendere ortogonale e quindi la matrice M di passaggio è ortogonale, quindi $M^{-1} = M^t$)
 se e solo se A è **SIMMETRICA** (**TEOREMA SPETTRALE**)
 (in particolare tutte le matrici simmetriche hanno n autovalori reali, se contati con molteplicità, e $m_A(\lambda) = m_g(\lambda)$).
- ④ A è sempre **JORDANIZZABILE** su $\mathbb{C}$. In tal caso
 → i numeri λ che compaiono sulla diagonale sono gli autovalori (ogni λ compare $m_A(\lambda)$ volte)
 → il numero dei blocchi con un certo λ è uguale a $m_g(\lambda)$
 → per ogni intero $k \geq 2$, il numero di blocchi di dimensione $\geq k$ è dato da
- $$\dim(\ker(A - \lambda I)^k) - \dim(\ker(A - \lambda I)^{k-1})$$
- (da questa formula ricaviamo il numero di blocchi di ogni dimensione)
- ⑤ A è jordanizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se tutti gli n autovalori sono reali (quella ottenuta in ④ è una matrice reale)
- ⑥ A è sempre jordanizzabile su $\mathbb{R}$ se consideriamo le matrici di jordan reali, che ora descriviamo (si ottengono da quelle complesse).

Fatto fondamentale. Se A è una matrice reale, allora gli eventuali autovalori davvero complessi compaiono a coppie, cioè
 → se $\lambda = a + ib$ è autovalore, allora anche $\lambda = a - ib$ lo è
 → ad ogni blocco con $a + ib$ corrisponde un blocco con $a - ib$

$$\begin{bmatrix} a+ib \\ a-ib \end{bmatrix}$$

JORDAN su $\mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

JORDAN REALE

$$\begin{pmatrix} a+ib & 1 \\ & a+ib \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-ib & 1 \\ & a-ib \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ & & a & b \\ & & -b & a \end{pmatrix}$$

E le matrici M di passaggio? O equivalentemente le basi in cui la matrice assume la forma di JORDAN REALE?

→ Basta prendere parti reali e immaginarie delle corrispondenti basi complesse

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑
già in forma
canonica

(volendo $M = Id$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

↑

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S=0$$

$$P=-1$$

autovalori: ± 1 (reali e distinti)

Alternativa brutta:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\rightsquigarrow \lambda = \pm 1$$

Quindi forma canonica su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Come trovo la M di passaggio? Risolvo $\begin{cases} Au_1 = u_1 \\ Au_2 = -u_2 \end{cases} \rightsquigarrow$ brutta

Oppure in alternativa

$$\boxed{\lambda=1}$$

$$A - Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \text{Span}((1, 1))$$

$$\boxed{\lambda = -1} \quad A + Id \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span} \{(1, -1)\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifica $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $\quad \quad \quad -0 \quad -0 \quad -$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad S = 0 \quad \lambda = \pm i \quad p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$$

$\uparrow$
autovalori in $\mathbb{C}$
distinti

→ Diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ con forma canonica $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

→ No diagonalizzabile in $\mathbb{R}$

→ In $\mathbb{R}$ c'è la jordan reale che si ricava da quella in $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ a=0 \\ b=1}]{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{La matrice iniziale è la jordan reale di se stessa!})$$

Troviamo M di passaggio nel caso complesso. Trovo gli autovettori complessi [Bovino sarebbe $A v_1 = i v_1, A v_2 = -i v_2$]

$$\boxed{\lambda = i} \quad A - i Id \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span} \{(1, i)\}$$

↑ sono uno il coniugato dell'altro

$$\boxed{\lambda = -i} \quad A + i Id \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span} \{(1, -i)\}$$

$$v_1 = (1, i) \quad v_2 = (1, -i) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \dots$$

Verifica: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Se volessi la base per la jordan reale, scrivo v_1 come parte reale più parte immaginaria

$$v_1 = (1, 0) + i (0, 1)$$

↑ ↑
base per la M di
passaggio alla jordan
reale

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— o — o —