

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1, 2, 2 1, 2, 2 1, 2, 2 1, 2, 2 1, 2, 2

Calcolare autovalori e molteplicità

Per le matrici 2, 3, 5 si vede che gli autovalori sono $1, 2, 2$
mult. alg. = 2

Vediamo la prima

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda \text{Id}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 6(2-\lambda) \\
 &= (2-\lambda) [+ (\lambda-4)(\lambda+1) + 6] \\
 &= (2-\lambda) (\lambda^2 + \lambda - 4\lambda - 4 + 6) \\
 &= (2-\lambda) (\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\
 &= (2-\lambda) (\lambda-1)(\lambda-2) \\
 &\leadsto \text{autovalori : } 1, 2, 2.
 \end{aligned}$$

guai a moltiplicazione! ↗

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda \text{Id}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + (1-\lambda) \\
 &= (1-\lambda) [3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1] \\
 &= (1-\lambda) (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\
 &= (1-\lambda) (\lambda-2)^2 \\
 &\leadsto \text{autovalori : } 1, 2, 2
 \end{aligned}$$

Quindi diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_g(2) = 2 \Leftrightarrow \dim(\ker(A - 2Id)) = 2$
 $\Leftrightarrow \text{rank}(A - 2Id) = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

ranko 1 ranko 1 ranko 1 ranko 2 ranko 1

Tutte tranne la 4^a sono diagonalizzabili

Diagonalizziamo la prima

$$\boxed{\lambda=2} \quad \ker(A - 2Id) = \text{Span}((\underset{\uparrow v_2}{1}, \underset{\uparrow v_3}{0}, -1), (0, 1, 0)) \quad (o \text{ viceversa})$$

$$\boxed{\lambda=1} \quad \ker(A - Id) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{Span}((\underset{\uparrow v_1}{2}, 2, -3))$$

$$C_1 + C_2 = \frac{3}{2} C_3$$

$$2C_1 + 2C_2 - 3C_3 = 0$$

Quindi $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

La verifica sarebbe che $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow v_2 \quad \varphi(v_2) = 2v_2$

$\uparrow$
 $\varphi(v_2)$

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1, 1, 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1, 1, 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2, $1 \pm \sqrt{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1, 1, 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1, 1, 2

Vediamo la terza

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = -\lambda(2-\lambda)^2 - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)[- \lambda(2-\lambda) - 1]$$

$$= (2-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 - 1)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

$$\downarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{5}$$

Se i calcoli sono giusti, la 3° matrice è diagonalizzabile (ha 3 autovalori reali distinti, e la sua forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Per le altre bisogna fare $\mu_g(1)$. Quindi

$$\text{diag} \Leftrightarrow \mu_g(1) = 2 \Leftrightarrow \dim(\ker(A - Id)) = 2 \Leftrightarrow \text{Rango}(A - Id) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ranko = 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ranko 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ranko 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ranko 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ranko 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↓
Dice che $\lambda = 1$
non è
autovalore

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

In tutti i casi gli autovalori sono 3, 3, 3 ($\lambda=3$ è autovalore con $m_a(3)=3$)

Chi sono le molteplicità geometriche?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_g(3)=1$$

$$m_g(3)=1$$

$$m_g(3)=1$$

$$m_g(3)=2$$

$$m_g(3)=1$$

(perché rango=2)

Nessuna è diagonalizzabile

Nella 4^a matrice l'autospazio è $\text{Span}((1,0,0), (0,1,0))$

Nella 2^a matrice l'autospazio è $\text{Span}((1,0,0))$

" 5^a " " " $\text{Span}((0,0,1))$

Consideriamo l'ultima matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$

Dico (e un giorno sarà chiaro) che la sua forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Dato per buono questo, trovare la M di} \\ \text{passaggio. Cosa deve succedere?} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A v_1 & A v_2 & A v_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} A v_1 = 3 v_1 \quad \leadsto v_1 = \text{autovettore di } 3 \\ A v_2 = 3 v_2 + v_1 \\ A v_3 = 3 v_3 + v_2 \end{matrix}$$

Quindi posso prendere $v = (0,0,1)$

$\uparrow$ generatore dell'autospazio

Come trovo $v_2 = (x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A \qquad v_2 \qquad 3v_2 \qquad v_3$

$$3x = 3x$$

$$-x + 3y = 3y \rightsquigarrow x = 0$$

$$y + 3z = 3z + 1 \rightsquigarrow y = 1$$

Quindi posso prendere $v_2 = (0, 1, 0)$

Infine trovo $v_3 = (x, y, z)$ imponendo

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x = 3x$$

$$-x + 3y = 3y + 1 \rightsquigarrow x = -1$$

$$y + 3z = 3z \rightsquigarrow y = 0$$

Quindi posso prendere $v_3 = (-1, 0, 0)$ da cui

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

— 0 — 0 —