

Domanda: come stabilisco se una certa A è diagonalizzabile?

Def. Dato un autovalore λ si definisce

→ molteplicità ALGEBRICA di λ la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico $\leadsto m_a(\lambda)$

→ molteplicità GEOMETRICA di λ la dimensione dell'autospazio $\leadsto m_g(\lambda)$

Fatto generale Per ogni λ autovalore vale

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Teorema Una matrice A è diagonalizzabile SUI REALI se e solo se valgono i seguenti due fatti:

- ① tutti gli autovalori di A sono numeri reali (e non sono obbligati ad esserlo)
- ② per ogni autovalore si ha $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Corollario Se tutti gli autovalori sono reali e distinti, allora per forza è diagonalizzabile
(in questo caso $m_a(\lambda) = 1$ per ogni autovalore)

Esempio $p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$ si dice che

→ $\lambda=2$ è radice di mult 1, quindi $m_a(2) = 1$

→ $\lambda=1$ è radice di mult 2, quindi $m_a(1) = 2$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1) \leadsto \lambda = 0 \quad \lambda = \pm i$$

complessi)
(1 solo autov. reale, 2 autov. davvero

$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Tr=4 Det=-5	Tr=4 Det=5	Tr=4 Det=5	Tr=4 Det=5	Tr=4 Det=5	Tr=4 Det=5

Chi è la forma canonica delle altre?

Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

↑ prod. radici
↑ somma radici cambiata di segno

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i \quad \leadsto \text{le radici sono numeri complessi, quindi non sono diagonalizzabili sui reali}$$

Le radici sono due numeri complessi distinti, quindi sono diagonalizzabili sui complessi con forma diagonale

$$\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Il procedimento è lo stesso che sui reali

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2+i \quad A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3-i \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda Id) = (3-i)(-3-i) + 10 = -9 - 3i + 3i - 1 + 10 = 0$$

$$\text{Chi è } \ker(A - \lambda Id) = \text{Span}((-5, 3-i)) \leadsto \text{autospazio di } \lambda = 2+i$$

$$\begin{aligned} -5c_1 + (3-i)c_2 &= -5 \begin{pmatrix} 3-i \\ -2 \end{pmatrix} + (3-i) \begin{pmatrix} 5 \\ -3-i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 10-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = 2 - i \quad A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 3+i & 5 \\ -2 & -3+i \end{pmatrix}$$

$$\ker((A - \lambda Id)) = \text{Span}((-5, 3+i))$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 coniugato di quell'altro

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 3-i & 3+i \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 3+i & 5 \\ -3+i & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{10i}$$

$$\det M = -15 - 5i + 15 - 5i \\ = -10i$$

Verifica: $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$

$\text{---} \text{---} \text{---}$
 $\text{---} \text{---} \text{---}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Chi sono gli autovalori?

Fatto generale: se A è triangolare superiore/inferiore, gli autovalori sono (con molteplicità) gli elementi della diagonale.

Sia A la terza matrice

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda & 0 \\ 5 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)$$

Le radici sono $\lambda=1$, $\lambda=-2$ e $\lambda=3$

Nota bene: le prime 3 matrici hanno gli stessi autovalori, tutti reali e tutti semplici ($m_0(\lambda)=1$)
 Quindi sono tutte diagonalizzabili
 con forma canonica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Nel caso della 3^a, come trovo la M di passaggio?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda=1} \quad A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6x-3y \\ 5x+4y+2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 13y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$z = 13t \quad y = -4t \quad x = -2t \quad (x, y, z) = t(-2, -4, 13)$$

↑ verifica OK

$$\ker(A - Id) = \text{Span}((-2, -4, 13))$$

↑ prima colonna di M

$$\boxed{\lambda=-2} \quad A + 2Id = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((0, 5, -4))$$

↑ seconda colonna di M

$$\boxed{\lambda=3} \quad A - 3Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \ker = \text{Span}((0, 0, 1))$$

↑
Anche risolvendo direttamente,
 z risulta parametro libero.

↑ terza colonna di M
questa è l'unica diagonalizzabile

$\mu_g=1$	$\mu_g=1$	$\mu_g=1$	$\mu_g=1$	$\mu_g=2$	$\mu_g=1$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$
Tr = 4	Tr = 4	Tr = 4	Tr = 4	Tr = 4	Tr = 4
Det = 4	Det = 4	Det = 4	Det = +4	Det = 4	Det = 4

Il polinomio caratteristico è sempre $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
 $(\lambda - 2)^2 = 0$

Quindi $\lambda=2$ è l'unico autovalore con $\mu_g(2) = 2$.

Per sapere se sono diagonalizzabili, devo calcolare

$$\mu_g(2) = \dim \ker(A - 2Id)$$