

FORME CANONICHE

Data $f: V \rightarrow W$ lineare, se scelgo bene le basi di V e W , quanto può diventare "bella" la matrice.
 ↑
 con tanti zeri

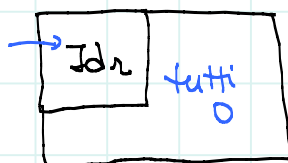
Due scenari che esaminiamo

→ $f: V \rightarrow W$ e scelgo "bene" le basi in partenza ed arrivo

→ $f: V \rightarrow V$ e voglio usare la stessa base in partenza ed arrivo

Scenario 1 Possiamo trovare le basi in modo che la matrice finale sia del tipo

matrice
identica
 $r \times r$



dove r è il rango, cioè la dimensione dell'immagine.

Esempio

V W
↓ ↓

Consideriamo l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z, w) = (x + y + z, y + z + w, w - x).$$

Determinare quali delle seguenti matrici rappresentano f per un'opportuna scelta delle basi in partenza ed arrivo (nei casi affermativi non sarebbe male anche fornire un esempio di tali basi).

3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$
3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$	1 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = D$

Se il rango $\neq 2$, non c'è storia

$$f(x, y, z, w) = (x+y+z, y+z+w, w-x)$$

Domanda 1: scrivere la matrice di f usando le basi canoniche in partenza ed arrivo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vista ad occhio: moltiplicando per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ deve venire l'espressione data

In alternativa $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, -1) \rightsquigarrow 1^a$ colonna

$f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0) \rightsquigarrow 2^a$ colonna

Domanda 2: determinare $\dim(\text{Im}(f))$ e una base

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Span}(\text{colonne}) = \text{Span}((1, 0, -1), (1, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)) \\ &\quad C_4 = C_2 - C_1 \\ &= \text{Span}((1, 0, -1), (1, 1, 0)) \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\quad \text{base dell'immagine} \end{aligned}$$

La teoria ci dice che esiste una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ ed esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ in cui la matrice diventa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3) \quad f(v_4)$

Come trovo queste basi?

→ v_3 e v_4 devono stare nel ker (che ha $\dim = 2$ per rank-nullity)

→ v_1 e v_2 completano v_3 e v_4 ad una base di $\mathbb{R}^4$

→ $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$, w_3 completa w_1 e w_2 .

Calcolo $\ker(f)$

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ y+z+w = 0 \\ -x + w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y+z+w = 0 \\ \cancel{y+z+w = 0} \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \end{cases}$$

$$w=t, z=s, y=-t-s, x=-y-z = t+s-s = t$$

$$(x, y, z, w) = (t, -t-s, s, t) = t(1, -1, 0, 1) + s(0, -1, 1, 0)$$

$$\ker f = \text{Span}((\underset{\substack{\uparrow \\ v_3}}{1, -1, 0, 1}), (\underset{\substack{\uparrow \\ v_4}}{0, -1, 1, 0}))$$

Provo con $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ $v_2 = (0, 1, 0, 0)$

Verifico

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0 \quad \checkmark$$

Ora $w_1 = f(v_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, -1)$

$$w_2 = f(v_2) = f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0)$$

Come w_3 provo con $(1, 2, 3)$. Verifico

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 3 - 2 + 1 = 2 \neq 0 \quad \checkmark$$

Relazione tra la matrice iniziale ^Arispetto alla base canonica e quella finale C.

Si ottengono l'una dall'altra mediante cambi di base, cioè

$$C = \underbrace{N^{-1}}_{\substack{\text{matrice} \\ 3 \times 3 \text{ che} \\ \text{cambia base} \\ \text{dalla canonica} \\ \text{di } \mathbb{R}^3 \text{ alla} \\ \{w_1, w_2, w_3\}}} A \underbrace{M}_{\substack{\text{matrice } 4 \times 4 \text{ che cambia base} \\ \text{in partenza dalla } \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ \text{alla canonica}}}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \\ \leftarrow e_4 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix}$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Verificare che effettivamente $C = N^{-1} A M$

Possiamo trovare una base in cui la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow \frac{1}{2} w_2 \\ \leftarrow w_3 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{matrix}$

$\rightsquigarrow$ la metà di quello di prima

e se voglio

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \frac{1}{3} w_1 \\ \leftarrow 35 w_3 \\ \leftarrow \frac{1}{7} w_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_4) & f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix}$

Come posso ottenere la D finale?

Sappiamo che $C = N^{-1} A M$

Allo stesso modo

$$C = N_1^{-1} D M_1$$

Ma allora $N_1^{-1} D M_1 = N^{-1} A M$

e da qui posso ricavare D come

$$D = N_1 N^{-1} A M M_1^{-1}$$

$$= \underbrace{(N N_1^{-1})}^{-1} A \underbrace{(M M_1^{-1})}$$

↑
le colonne di
questa sono
una base di $\mathbb{R}^3$

le colonne di questo sono
una base di $\mathbb{R}^6$

tu cui succede quello che deve succedere!

— o — o —