

2. Sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0\},$

(b) $W = \{(t, t + s, 2s - 3t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\},$

(c) $W = \text{Span}((1, -1, 1)),$

(d) $W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 2, 3)),$

(e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = y + z = 0\}.$

(2c) $W = \text{Span}((1, -1, 1)) = \text{retta}$

$W^\perp = \text{piano} \perp \text{alla retta}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$

$= \text{Span}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$

Se voglio base ortogonale del piano uso GS a partire da

$w_1 = (1, 1, 0) \quad w_2 = (0, 1, 1)$

$\hat{w}_1 = w_1 = (1, 1, 0)$

$\hat{w}_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, \hat{w}_1 \rangle}{\langle \hat{w}_1, \hat{w}_1 \rangle} \hat{w}_1$

$= (0, 1, 1) - \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \rightsquigarrow (-1, 1, 2)$

Verifico che $\langle \hat{w}_1, \hat{w}_2 \rangle = 0$ e che $\hat{w}_2$ è piano $W^\perp$ Nota bene: $(1, -1, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 2)$ sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ Trovo equazione cartesiana per $W = \text{Span}((1, -1, 1))$.

Devo trovare 2 piani qualunque che intersecati diano la retta.

$ax + by + cz = 0$

Impongo che $(1, -1, 1)$ la soddisfi:

$a - b + c = 0 \rightsquigarrow$ posso fissare b e c come mi pare

$b = 1, c = 0 \rightsquigarrow a = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x + y = 0 \end{cases}$

$b = 2, c = 27 \rightsquigarrow a = -25 \rightsquigarrow \begin{cases} -25x + 2y + 27z = 0 \end{cases}$

Due piani che
intersecati
danno W

$$(2d) \quad W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 2, 3)) = \text{piano}$$

Cartesiana per W

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow (-5, -2, 3) \rightsquigarrow -5x - 2y + 3z = 0$$

↑
i 2 vettori che spannano
 W la verificano

$$W^\perp = \text{retta} = \text{Span}((-5, -2, 3))$$

Cartesiana di $W^\perp$... posso fare come prima, ma in realtà

posso usare

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{sono 2 eq. lin. indep. (cioè due piani} \\ \text{distinti)} \text{ e il vettore } (-5, -2, 3) \text{ appartiene} \\ \text{ad entrambi} \end{array} \right\}$$

Se voglio base ortogonale di W uso $\hat{w}_1 = (1, -1, 1)$ e poi con GS

$$\hat{w}_2 = (1, 2, 3) - \frac{\langle w_2, \hat{w}_1 \rangle}{\langle \hat{w}_1, \hat{w}_1 \rangle} \hat{w}_1 = (1, 2, 3) - \frac{2}{3} (1, -1, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3} \right) \rightsquigarrow (1, 8, 7)$$

↑
perp. a $\hat{w}_1$ e
verifica l'eq. del
piano

Calcolare le matrici di proiezione su

$$W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 8, 7))$$

$$W^\perp = \text{Span}((-5, -2, 3))$$

Cosa vuol dire? Ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico

$$\text{come } v = \underset{\substack{\uparrow \\ \in W}}{v_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \in W^\perp}}{v_2}$$

Le due matrici di proiezione producono v_1 e v_2 a partire da v

Come trovo le matrici? Prendo la base canonica, calcolo v_1 e v_2 ,
e li uso come colonne

$$(1,0,0) = \underbrace{a(1,-1,1) + b(1,8,7)}_{v_1} + \underbrace{c(-5,-2,3)}_{v_2}$$

Per calcolare a, b, c posso risolvere il sistema, o usare i prodotti scalari, visto che è una base ortogonale

$$\langle (1,0,0), (-5,-2,3) \rangle = c \langle (-5,-2,3), (-5,-2,3) \rangle$$

$$-5 = c \cdot 38 \quad c = -\frac{5}{38}$$

$$(1,0,0) = -\frac{5}{38}(-5,-2,3) + v_1$$

$$= \underbrace{\left(\frac{25}{38}, \frac{10}{38}, -\frac{15}{38}\right)}_{\in W^\perp} + \underbrace{\left(\frac{13}{38}, -\frac{10}{38}, \frac{15}{38}\right)}_{\in W}$$

↑
prima colonna
matrice proiezione su $W^\perp$

$$(0,1,0) \rightsquigarrow \langle (0,1,0), (-5,-2,3) \rangle = c \cdot 38 \quad c = -\frac{2}{38}$$

Seconda colonna è $\left(+\frac{10}{38}, +\frac{4}{38}, -\frac{6}{38}\right)$

Idee per la 3^a colonna.

— 0 — 0 —

(e) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = y + z = 0\}$. = retta

$$\begin{aligned} x - 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$W = \text{Span}((2,-1,1))$$

$$W^\perp = \text{piano} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$$

$$= \text{Span}((1,2,0), (1,0,-2))$$

Se di $W^\perp$ voglio una base ortogonale, cosa faccio?

1° modo GS a partire da $(1,2,0)$ e $(1,0,-2)$

2° modo Misteriosa a partire da $(2, -1, 1)$ e $(1, 2, 0)$

(otengo un vettore $\perp$ a $(2, -1, 1)$, quindi nel piano, e $\perp$ a $(1, 2, 0)$, che è quello che volevo)

* * *

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \end{matrix} \rightsquigarrow (-2, 1, 5) \leftarrow \text{Verifica delle proprietà}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Se voglio la matrice di proiezione su $W = \text{Span}((2, -1, 1))$ faccio come prima

$$(1, 0, 0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{piano}}}{v_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{retta}}}{v_2} = v_1 + c(2, -1, 1)$$

$$c = \frac{\langle (1, 0, 0), (2, -1, 1) \rangle}{\langle (2, -1, 1), (2, -1, 1) \rangle} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$(0, 1, 0) \rightsquigarrow -\frac{1}{6}(2, -1, 1)$$

$$(0, 0, 1) \rightsquigarrow \frac{1}{6}(2, -1, 1)$$

Proprietà di A Prendiamo un vettore qualunque $(1, 2, -1)$

Diamolo in pasto alla matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ora scrivo

$$(1, 2, -1) = \underbrace{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)}_{\in W} + \underbrace{\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{6}, -\frac{5}{6}\right)}_{\in W^\perp}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{6}(2, -1, 1)}_{=0} \quad \underbrace{2x - y + z = 0}_{=0}$$