

GRAM-SCHMIDT (Aka algoritmo della banana)

Data una base qualsunque $\{v_1, \dots, v_m\}$ di $\mathbb{R}^n$, produrre una base ortogonale o ortonormale $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ di $\mathbb{R}^n$ con la proprietà che

$$\hat{v}_1 \in \text{Span}(v_1)$$

← $\hat{v}_1$ è multiplo di v_1

$$\hat{v}_2 \in \text{Span}(v_1, v_2)$$

← $\hat{v}_2$ è piano generato da v_1 e v_2

$$\hat{v}_3 \in \text{Span}(v_1, v_2, v_3) \quad \text{: e così via}$$

e così via

Oss. Il punto fondamentale è produrre una base ortogonale.
Poi renderla ortonormale è facile. (basta moltiplicare tutti i vettori per un numero opportuno).

Descrizione dell'algoritmo

$$\hat{v}_1 = v_1$$

o

o scrivendo
il conto
↑

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1$$

numero

(si verifica anche a mente che $\langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle = 0$)

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2$$

(si verifica che $\langle \hat{v}_3, \hat{v}_1 \rangle = \langle \hat{v}_3, \hat{v}_2 \rangle = 0$)

e così via.

— o — o —

11. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che

- $\text{Span}(\hat{v}_1) = \text{Span}((1, 1, 0, 0))$,
- $\text{Span}(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = \text{Span}((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0))$,
- $\text{Span}(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3) = \text{Span}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$,
- tutti i 4 vettori che ne fanno parte hanno la prima componente positiva.

$$\hat{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_2 &= (1, 0, 1, 0) - \frac{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 \\ &= (1, 0, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)\end{aligned}$$

verifica a mente
 $\langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle = 0$

$$\begin{aligned}\hat{v}_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2 \\ &= (0, 0, 1, 1) - \frac{0}{2} \hat{v}_1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ &= (0, 0, 1, 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\end{aligned}$$

a mente verifico
 $\langle \hat{v}_1, \hat{v}_3 \rangle = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_3 \rangle = 0$

Oss. Visto che per il momento ci interessa solo avere una base ORTOGONALE, posso anche liberarmi delle frazioni e porre

$$\hat{v}_1 = (1, 1, 0, 0) \quad \hat{v}_2 = (1, -1, 2, 0) \quad \hat{v}_3 = (-1, 1, 1, 3)$$

Ne serve un quarto che completi la base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.
Come lo faccio?

1° modo Boviato. Risolvo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -x + y + z + 3w = 0 \end{cases}$$

2° modo Scelgo v_4 in modo che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia base di $\mathbb{R}^4$
 (per essere sicuro faccio il Det 4×4).
 Faccio il 4° step di GS e calcolo $\hat{v}_4$.

3° modo Uso l'equivalente in $\mathbb{R}^4$ della formula ex-misteriosa!

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \quad \leadsto \quad \hat{v}_4 = (\dots)$$

Esercizio: fare il conto nei 3 modi.

Se alla fine la base la voglio orthonormale, basta dividere per la cosa opportuna

$$\begin{array}{lll} (1, 1, 0, 0) & \leadsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) = w_1 \\ (1, -1, 2, 0) & \leadsto & \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) = w_2 \\ (-1, 1, 1, 3) & \leadsto & \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}\right) = w_3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1, 1, 0, 0) \\ (1, -1, 2, 0) \\ (-1, 1, 1, 3) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ho diviso per la} \\ \text{norma del} \\ \text{vettore} \end{array}$$

Supponiamo di aver calcolato anche w_4 allo stesso modo.

Determinare la componente di $(1, 2, 3, 4)$ rispetto a w_2 .
 Come si fa?

$$\text{Basta fare } \langle (1, 2, 3, 4), w_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

— o — o —

1. Sottospazi di $\mathbb{R}^2$.

(a) $W = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0$,

(b) $W = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0$,

(c) $W = \text{Span}((1, 3))$,

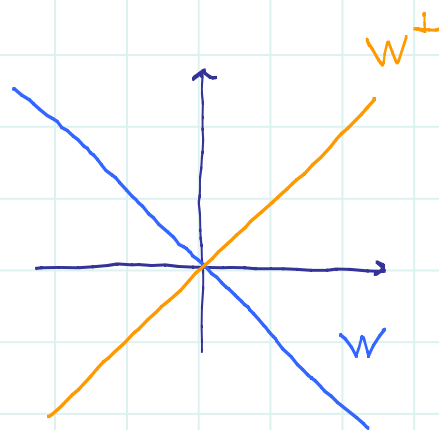
(d) $W = \text{Span}((0, 4))$.

(1a) $W = \text{Span}((1, -1))$

$W^\perp = \text{Span}((1, 1))$

$= \text{Span}((-27, -27))$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 0\}$



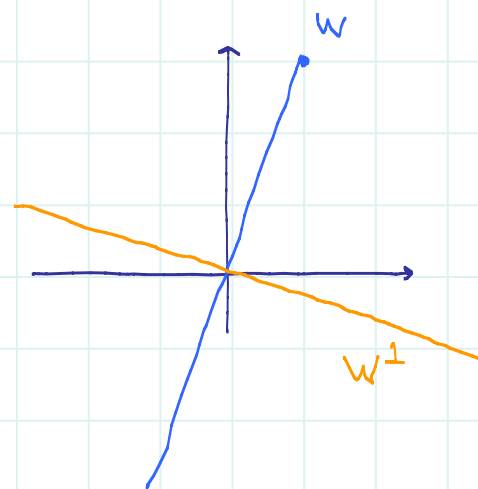
(1b) $W = \text{Span}((0, 1))$

$W^\perp = \text{Span}((1, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

(1c) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 3x = 0\}$

$W^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y + x = 0\}$

$= \text{Span}((3, -1))$



(1d) $W = \text{asse } y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

$W^\perp = \text{asse } x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \text{Span}((-1237, 0))$
 $\text{--- } 0 \text{ ---}$

2. Sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0\}$,

(b) $W = \{(t, t + s, 2s - 3t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$,

(c) $W = \text{Span}((1, -1, 1))$,

(d) $W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 2, 3))$,

(e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = y + z = 0\}$.

(2a) $W = \text{Span}((2, 0, 1), (0, 1, 0)) \leftarrow \text{base ortogonale}$

$W^\perp = \text{Span}((1, 0, -2))$

(2b) $W = \text{Span}(\underbrace{(1, 1, -3)}_{\vec{w}_1}, \underbrace{(0, 1, 2)}_{\vec{w}_2}) \subset (1, 1, -3) + S(0, 1, 2)$

Non è una base ortogonale. Se la volessi ortogonale?

$$\hat{w}_1 = w_1$$

$$\hat{w}_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, \hat{w}_1 \rangle}{\langle \hat{w}_1, \hat{w}_1 \rangle} \hat{w}_1$$

$$= (0, 1, 2) + \frac{+5}{11} (1, 1, -3) = \left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{7}{11} \right)$$

oppure $\hat{w}_2 = (5, 16, 7)$

Quindi $W = \text{Span}((1, 1, -3), (5, 16, 7))$

↑ ↑
Sono una base
ORTOGONALE

— o — o —