

Basi ortogonali / ortonormali

Siamo in $\mathbb{R}^n$. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice

- ortogonale se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$
- ortonormale se in aggiunta alla precedente vale che
 $\|v_i\|^2 = \langle v_i, v_i \rangle = 1$ per ogni i

Esempio classico: la base canonica è ortonormale

Proprietà chiave: se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale, allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ la sua componente rispetto a v_i è $\langle v, v_i \rangle$ (quindi basta fare il prod. scal. invece di risolvere il sistema) e quindi

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

↑
componenti di v rispetto alla base

Dim.

$$\begin{aligned} v &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, \text{ allora} \\ \langle v, v_i \rangle &= \langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, v_i \rangle \\ &= a_1 \langle v_1, v_i \rangle + a_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + a_n \langle v_n, v_i \rangle \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \text{sono tutti nulli, tranne l'i-esimo che} \\ &\quad \text{viene 1} \\ &= a_i \leftarrow \text{coeff.} \end{aligned}$$

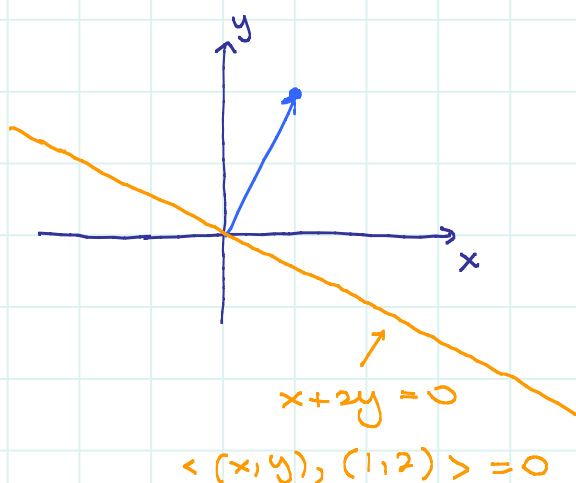
Oss. Se la base è solo ortogonale, allora nel conto precedente resta

$$\langle v, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle \rightsquigarrow$$

$$a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

1. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che contiene il vettore $(1, 2)$.
2. Determinare per quali valori del parametro a si ha che $\{(1, 2), (3, a)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.
3. Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che $\{(1, 2, 3), (4, 5, a), (6, b, c)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

①



$$v_1 = (1, 2)$$

Basta prendere v_2 nella retta $\perp$ a v_1 ,
ad esempio

$$v_2 = (-2, 1)$$

$$v_2 = (2, -1)$$

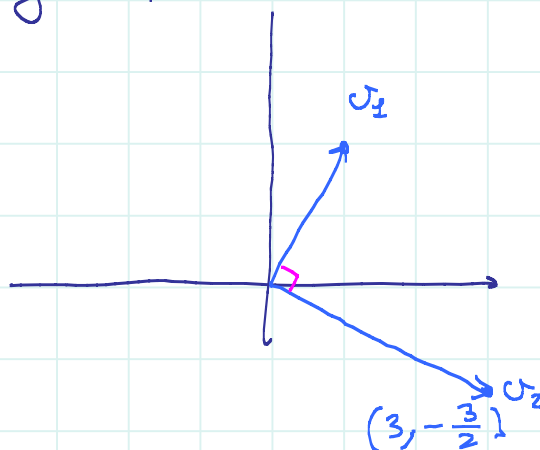
$$v_2 = (-32, 16)$$

} basta che accada
che $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

② $v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (3, a)$ sia base ortogonale.

Devo imporre $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$$3 + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$



③ $v_1 = (1, 2, 3)$

$$v_2 = (4, 5, a)$$

$$v_3 = (6, b, c)$$

Devo imporre $\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow 4 + 10 + 3a = 0$

$$\Rightarrow a = -\frac{14}{3}$$

Ora impongo $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$

$$6 + 2b + 3c = 0$$

$\langle v_2, v_3 \rangle = 0$

$$24 + 5b - \frac{14}{3}c = 0$$

$\Rightarrow$ trovo b e c in modo unico. Infatti la matrice dei coeff.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$ ha rango 2 e quindi per Rouché - Capelli
abbiamo sol. unica.

4. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $\text{Span}(v_1) = \text{Span}((3, 4))$.

↑↑ ↑↑↑

Chi può essere v_1 ?

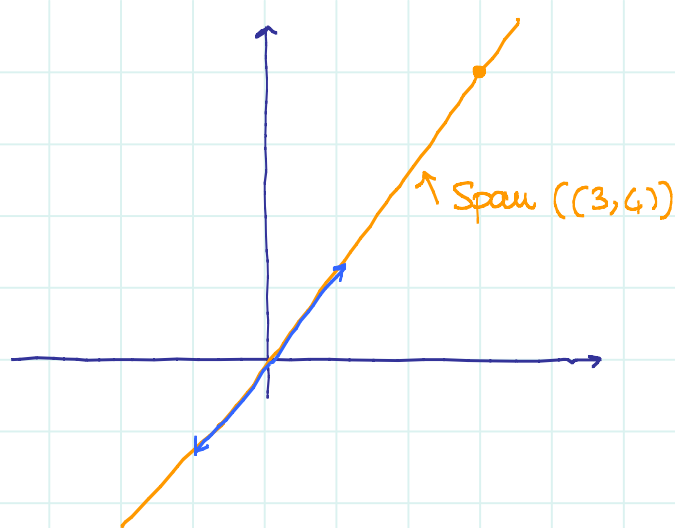
→ v_1 deve stare sulla retta

→ $\|v_1\|^2 = 1$ (base ortonormale)

$$v_1 = (3a, 4a)$$

$$9a^2 + 16a^2 = 1 \rightsquigarrow a^2 = \frac{1}{25}$$

$$\rightsquigarrow a = \pm \frac{1}{5}$$



Ci sono quindi due possibilità

$$v_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$v_1 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

v_2 deve essere di norma 1 e contenuto nella retta $\perp$ a $\text{Span}((3,4))$.

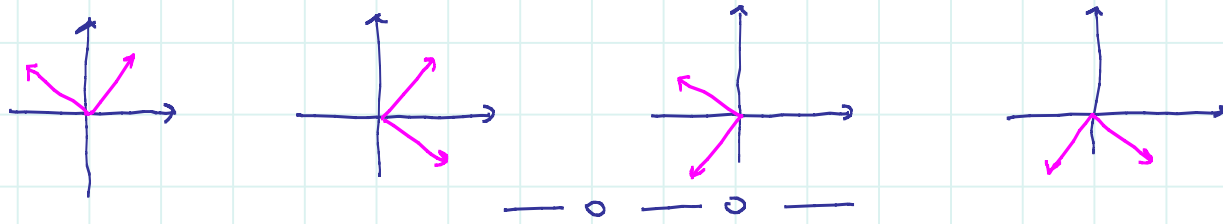
A occhio si vede che le due possibilità sono

$$v_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

oppure

$$v_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Quante sono le possibili basi? Sono 4: posso accoppiare uno qualunque dei v_1 con uno qualunque dei v_2



5. Sia $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $v_1 \in V$.

Chi può essere v_1 ?

$$v_1 = (a, a)$$

$$a^2 + a^2 = 1 \rightsquigarrow a^2 = \frac{1}{2} \rightsquigarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

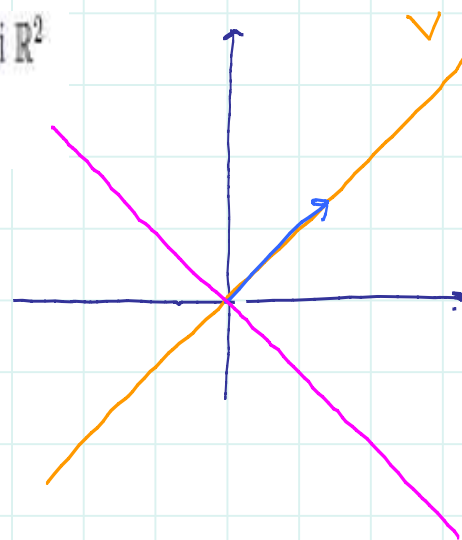
$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Anche qui 4 possibilità



6. Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Determinare per quali valori dei parametri a e b esiste una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1 = (3, a, b)$, $v_2 \in W$ e $v_3 \in W$.

↑ ↑

↑↑

v_2 e v_3 stanno nel piano. Quindi v_1 come deve essere?

Deve essere perpendicolare al piano, quindi multiplo di $(1, 2, -1)$

Visto che la prima componente è 3, allora

$$v_1 = (3, 6, -3)$$

Per v_2 e v_3 ho ampia scelta, ad esempio

$$v_2 = (1, 1, 3) \leftarrow \text{basta che stia nel piano}$$

Come trovo v_3 ?

1° modo: risolvo il sistema $v_3 = (x, y, z)$

$$3x + 6y - 3z = 0 \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 0$$

$$x + y - 3z = 0 \quad \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

2° modo: formula ex-misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_3 = (7, -4, -1) \leftarrow \text{verifico che sia } \perp \text{ a } v_1 \text{ e } v_2 \quad \checkmark$$

— 0 — 0 —

8. Siano $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $v_1 \in W_1 \cap W_2$ e $v_2 \in W_2$.

↑ ↑

Devo trovare $W_1 \cap W_2$. Risolvo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 & x + 2y - z = 0 & z = 2t \rightsquigarrow y = t \\ x - 2y + z = 0 & 4y - 2z = 0 & \rightsquigarrow x = z - 2y = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (0, t, 2t) = t(0, 1, 2)$$

$$\text{Quindi } W_1 \cap W_2 = \text{Span}((0, 1, 2))$$

Quindi $v_1 = (0, a, 2a)$ e ha norma 1, quindi $5a^2 = 1$, $a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$v_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Come trovo v_2 ? $v_2 = (x, y, z)$

Impongo il sistema

$$x - 2y + z = 0 \quad \leftarrow \text{appartenenza a } W_2$$

$$y + 2z = 0 \quad \leftarrow \langle v_2, v_1 \rangle = 0$$

Risolvendo ho un parametro libero che trovo imponendo

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$\Rightarrow$ avrò 2 possibilità per v_2

Trovati v_2 e v_1 , trovo v_3 con la formula misteriosa (anche qui avrò due possibilità).

Alla fine le basi possibili sono 8 (2 poss. per v_1
" " " v_2
" " " v_3).

— 0 — 0 —