

Conclusione esercizio precedente

(b) Determinare $f(-1, 1, 0, 0)$.

(c) Determinare l'insieme di tutti i vettori $w \in W$ tali che $f(w) = (1, -1, -1, 1)$.

Dove eravamo arrivati

$$W = \text{Span} \left(\underbrace{(1, -1, 1, -1)}_{w_1}, \underbrace{(1, -1, -1, 1)}_{w_2} \right)$$

e l'applicazione $f: W \rightarrow W$ era tale che

$$f(w_1) = w_2$$

$$f(w_2) = 0$$

$$(b) \quad f(\underbrace{(-1, 1, 0, 0)}_{\substack{\in W \\ x+y+z+w=0}}) \quad \text{quindi} \quad (-1, 1, 0, 0) = a w_1 + b w_2 \\ = -\frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2$$

$$f(-1, 1, 0, 0) = -\frac{1}{2} f(w_1) - \frac{1}{2} f(w_2) = \frac{w_2}{2} = \frac{1}{2} (1, -1, -1, 1)$$

(c) Trovare i $w \in W$ t.c. $f(w) = w_2$

$w \in W$ lo scrivo come $w = a w_1 + b w_2$

$$f(w) = a f(w_1) + b f(w_2)$$

$$= a w_2 = w_2 \quad (\Rightarrow) \quad a = 1 \text{ e } b \text{ è qualunque}$$

$$\text{Quindi } f(w) = w_2 \quad (\Rightarrow) \quad w = w_1 + b w_2$$

$\uparrow$ libero

= retta che non passa per l'origine

— o — o —

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V , sia $\{w_1, w_2\}$ una base di uno spazio vettoriale W , e sia $f: V \rightarrow W$ l'applicazione lineare rappresentata, in quelle basi, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determinare le matrici che rappresentano la stessa applicazione f rispetto alle basi indicate (se quelle indicate non sono basi, accorgersene e segnalare che la richiesta non ha senso).

Base V e Base W	Matrice	Base V e Base W	Matrice
$\{v_2, v_1, v_3\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_2, w_1\}$	
$\{v_2, v_3, v_1\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_3, v_2, v_1\}$ $\{w_1, w_2\}$	
$\{v_1, v_3, v_2\}$ $\{w_2, w_1\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_2, w_1\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_1, w_1 + w_2\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_1, w_1 + w_2\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_1 - w_2, w_1 + w_2\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_1 - w_2, w_1 + w_2\}$	

$$f: V \rightarrow W \quad V \text{ ha base } \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$W \text{ ha base } \{w_1, w_2\}$$

In queste basi la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix}$

$$f(v_2) = 2w_1 + 5w_2$$

Se cambio basi in V e W , come cambia la matrice?

$$V \rightarrow \{v_3, v_2, v_1\}$$

$$W \rightarrow \{w_1, w_2\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_3) & f(v_2) & f(v_1) \end{matrix}$

$$V = \{v_2, v_3, v_1\}$$

$$W = \{w_2, w_1\}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_1 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_2) & f(v_3) & f(v_1) \end{matrix}$

$$V = \{v_1, v_2, v_3 + v_1\}$$

$$W = \{w_2, w_1\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_1 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3 + v_1) \end{matrix}$

Ho usato che $f(v_3 + v_1) = f(v_3) + f(v_1)$

$$= 6w_2 + 3w_1 + 4w_2 + w_1$$

$$= 10w_2 + 4w_1$$

$$V = \{v_1, v_3, v_2\}$$

$$W = \{w_1, w_1 + w_2\}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_1 + w_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_3) & f(v_2) \end{matrix}$$

$$f(v_1) = w_1 + 4w_2 = aw_1 + b(w_1 + w_2) \rightsquigarrow b = 4 \quad a = -3$$

$$f(v_2) = 2w_1 + 5w_2 = aw_1 + b(w_1 + w_2) \rightsquigarrow b = 5 \quad a = -3$$

$$f(v_3) = 3w_1 + 6w_2 = aw_1 + b(w_1 + w_2) \rightsquigarrow b = 6 \quad a = -3$$

$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$
$\{w_1, w_2\}$	$\{w_1 - w_2, w_2 - w_1\}$

NON è una base di V

Non è una base di W !!!
(non sono l.i.u. indep.)

$1^\circ + 2^\circ = -3^\circ$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 1 - 1 = 0$$

— 0 — 0 —

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V , e sia $f: V \rightarrow V$ l'applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = v_1, \quad f(v_2) = 2v_2, \quad f(v_3) = 2v_3 + v_2.$$

Determinare le matrici che rappresentano la stessa applicazione f utilizzando in partenza ed arrivo le basi indicate.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

{Base partenza}	Matrice	{Base partenza}	Matrice
{Base arrivo}		{Base arrivo}	
$\{v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_1, v_3, v_2\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_1, v_3, v_2\}$	
$\{v_3, v_2, v_1\}$		$\{v_2, v_3, v_1\}$	
$\{v_3, v_2, v_1\}$		$\{v_2, v_3, v_1\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_3, v_2, v_1\}$	
$\{v_3, v_2, v_1\}$		$\{v_1, v_2, v_3\}$	

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_3) & f(v_2) & f(v_1) \end{matrix}$$

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ed il sottospazio $W = \text{Span}\{(1, 2, 3)\}$.

- (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = V$ e $\text{Im}(f) = W$.
(b) Descrivere l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente. Si tratta di uno spazio vettoriale?

(a) Scrivo V come Span

$$V = \text{Span} \left(\underset{\vec{v}_1}{(1, -1, 0)}, \underset{\vec{v}_2}{(1, 0, -1)} \right)$$

(Andava bene anche $\text{Span}((1, 5, -6), (2, -1, -1))$)

Per forza deve essere $f(\vec{v}_1) = 0$

$$f(\vec{v}_2) = 0$$

Completo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ aggiungendo un $\vec{v}_3$ opportuno in modo che venga una base. Ad esempio $\vec{v}_3 = (0, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = +1 \neq 0 \leadsto$ sono una base

$f(\vec{v}_3)$ cosa può essere? Deve per forza essere un multiplo di $(1, 2, 3)$

$$f(\vec{v}_1) = 0$$

$$f(\vec{v}_2) = 0$$

$$f(\vec{v}_3) = a(1, 2, 3) \quad \text{con } a \neq 0 \quad (\text{altrimenti sarebbe tutto } \ker)$$

A questo punto, fissato a , f è univoc. det. (ho detto dove va una base).

Oss. Potavo anche scegliere $\vec{v}_3 = (1, 2, 3)$?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 + 3 + 2 = 6 \neq 0.$$

Usando questa nuova base di $\mathbb{R}^3$, cioè

$$u_1 = (1, -1, 0)$$

$$u_2 = (1, 0, -1)$$

$$U_3 = (1, 2, 3)$$

La matrice dell'applicazione diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix}$$

Sono uno spazio vettoriale? NO, perché non c'è quella nulla, dal momento che $\underline{a=0}$ è vietato!

Finale Trovare $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ non nulla tale che
 $\varphi(\varphi(v)) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

Esiste $v_1 \in \mathbb{R}^2$ t.c. $f(v_1) = v_2 \neq 0$

Quanto fa $f(v_2)$? $f(v_2) = f(f(v_1)) = 0$

Dico che v_1 e v_2 sono lin. indep.

$$au_1 + bu_2 = 0$$

$$0 = f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2) = av_2 \Rightarrow a = 0$$
$$\Rightarrow b = 0$$

Quindi basta scegliere una base v_1, v_2 e porre

$$f(v_1) = v_2$$

$$\psi(u_2) = 0$$

In quella base la matrice è $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Vedere in futuro JORDAN

10101