

1. Consideriamo l'applicazione lineare $f: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ definita da

$$f(A) = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A.$$

- (a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $M_{2 \times 2}$.
- (b) Determinare la dimensione ed una base del $\ker$ e dell'immagine di f .
- (c) Determinare la dimensione dell'intersezione tra il $\ker$ e l'immagine di f .
- (d) Determinare la dimensione ed una base del $\ker$ e dell'immagine di $f \circ f$ e $f \circ f \circ f$.

(a) Base canonica

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1° modo Calcolo $f(e_1), f(e_2), \dots$

2° modo Calcolo direttamente

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3b-2c & 2a+3b-2d \\ -3a-3c+3d & -3b+2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \\ \leftarrow e_4 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{matrix}$

(b) $\text{Dim}(\text{Im}(f)) = \text{ranko della matrice}$

Il ranko è ≤ 3 (ultima colonna = -prima colonna)

Il ranko è lo stesso della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Prima ho diviso la 2ª colonna per 3, poi ho diviso la 3ª riga per 3...

$$\text{Det} = -2 + 2 = 0$$

$$1^{\text{a}} \text{ colonna} - 2 \cdot 2^{\text{a}} \text{ colonna} = 3^{\text{a}} \text{ colonna.}$$

Quindi abbiamo 2 relazioni

$$\begin{aligned} \text{Span}(C_1, C_2, C_3, C_4) &= \text{Span}(C_1, C_2, C_1 - 2C_2, -C_1) \\ &= \text{Span}(C_1, C_2) \end{aligned}$$

$$\text{Dim}(\text{Im}) = 2 \rightsquigarrow \text{Dim}(\text{ker}) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Base Im e Base ker. Base(Im)} &= \text{prime due colonne} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Base del ker: o vediamo a occhio due el. lin. indep., oppure risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 3b-2c & 2a+3b-2d \\ -3a-3c+3d & -3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3b-2c = 0 \\ 2a+3b-2d = 0 \\ -a-c+d = 0 \\ -3b+2c = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} b=2t &\rightsquigarrow c=3t \\ d=s \\ \rightsquigarrow a=d-c &= s-3t \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } (a, b, c, d) = (s-3t, 2t, 3t, s)$$

$$= s(1, 0, 0, 1) + t(-3, 2, 3, 0)$$

$$= s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{base del ker}$$

3. Consideriamo l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c, d si ha che $(1, 1, 1, 1) \in \ker(f)$.

(b) Sia $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, x - 2w = 0\}$.

Determinare per quali valori dei parametri si ha che $f(v) \in V$ per ogni $v \in V$.

(c) Sia $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4w = 0\}$.

Determinare per quali valori dei parametri si ha che $\text{Im}(f) \subseteq W$.

$$(a) \quad (1, 1, 1, 1) \in \ker(f) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+3 \\ b+3 \\ c+3 \\ d+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=b=c=d=-3$$

(b) Ci aspettiamo che V sia un s.sp. di dim. 2.

Troviamo una base equazione copiata male 😞

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 2w = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} z = 2s &\leadsto 2y = -x - 3z = -2t - 6s \\ w = t &\leadsto x = 2t \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\downarrow \\ y &= -t - 3s \end{aligned}$$

$$(x, y, z, w) = (2t, -t - 3s, 2s, t)$$

$$= t(2, -1, 0, 1) + s(0, -3, 2, 0)$$

$\uparrow$ una base di V $= \{v_1, v_2\}$

(verifico che risolvano il sistema)

Ora $f(v) \in V$ per ogni $v \in V \Leftrightarrow f(v_1) \in V$ e $f(v_2) \in V$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -b+3 \\ 2 \\ d+1 \end{pmatrix} \in V$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3b+2 \\ -3+2c \\ -1 \end{pmatrix} \in V$$

Le equazioni di V sono $x+y+z=0$ e $x-2w=0$

Le impongo nei 2 casi

$$2a-b+3+2=0$$

$$2a-2d-2=0$$

Non accade MAI

$$-1-3b+2-3+2c=0$$

$$-1+2=0 \quad \text{☹}$$

$$(c) \quad W = \{x+2y+3z+4w=0\}$$

Per quali valori dei parametri $\text{Im}(f) \subseteq W$.

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4))$$

dove $v_1, \dots, v_4$ sono una base qualunque.

Solgo la canonica, così ottengo

$$\text{Span}(C_1, C_2, C_3, C_4)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
colonne della matrice

Basta imporre che le colonne stiano in W

$$a+9=0$$

$$2b+8=0$$

$\leadsto$ trovo a, b, c, d

$$3c+7=0$$

$$4d+6=0$$

— 0 — 0 —

4. Consideriamo lo spazio vettoriale $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=z+w=0\}$.

(a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : W \rightarrow W$ che verifica le seguenti condizioni:

- $f(1, -1, 1, -1) = (1, -1, -1, 1)$,
- $f(f(w)) = 0$ per ogni $w \in W$.

$W = \text{s.sp. di dimensione } 2$. Base di $W = \{(1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1)\}$
 $w_1 \quad w_2$

$$f(w_1) = w_2$$

$\uparrow$
lo dice il
testo

$$f(w_2) = f(f(w_1)) = 0$$

$\uparrow$
lo dice il
testo

— 0 — 0 —

Teo. struttura: f
esiste ed è unica.