

①	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,1) \rightarrow (0,0,1)$ $(1,1,0) \rightarrow (0,1,1)$ $(1,0,0) \rightarrow (1,1,1)$		$\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$x^3 + x \rightarrow (0,0,1)$ $x^2 + 2 \rightarrow (0,1,2)$ $(x+1)^4 \rightarrow (1,2,3)$	②
	$\vee$	W			$\vee$	W		

Domanda: esistenza e unicità $f: V \rightarrow W$ con le proprietà date

Eventualmente: matrice tra basi canoniche

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \neq 0 \quad \text{In partenza sono una base} \\ \Rightarrow \text{esistenza e unicità}$

Per la matrice.

1° modo $f(1,0,0) = (1,1,1)$

$$f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(1,0,0) \\ = (0,1,1) - (1,1,1) = (-1,0,0)$$

$$f(0,0,1) = f(1,1,1) - f(1,1,0) = \\ = (0,0,1) - (0,1,1) = (0,-1,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica: dare in pasto ad A i 3 vettori a sx e vedere che vengono quelli a dx

2° modo Superbovino

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

e impongo le 3 condizioni date

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e+f \\ g+h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 3 \text{ equazioni}$$

Imponendo le altre 2 condizioni trovo un sistema di 9 equazioni, che mi basta risolvere.

3° modo Uso un cambio di base

$$f(1,1,1) = (0,0,1)$$

$$f(1,1,0) = (0,1,1)$$

$$f(1,0,0) = (1,1,1)$$

Siano v_1, v_2, v_3 i 3 vettori in partenza.

Considero la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \right\} \text{base canonica}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array}$

Quindi B rappresenta f dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Quindi mi serve M che cambi base in partenza dalla $\{e_1, e_2, e_3\}$ alla $\{v_1, v_2, v_3\}$ e poi avrò $A = BM$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$

Questa matrice va dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ come cambio base.

La M che cerco è l'inversa di questa, che posso calcolare anche con i determinanti.

Esercizio utile: controllare che venga lo stesso con i 3 metodi.

$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1)$ $(1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$ $(1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$		$\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$x^3 + x \rightarrow (0, 0, 1)$ $x^2 + 2 \rightarrow (0, 1, 2)$ $(x+1)^4 \rightarrow (1, 2, 3)$	
----------------	----------------	---	--	--------------------------	----------------	---	--

V W

$\dim(\mathbb{R}_{\leq 4}[x]) = 5$

I 3 vettori in partenza non possono essere una base.

Sono lin. indep.? Si

1° modo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4$

$x^3 + x$

$x^2 + 2$

$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

Voglio che rango = 3 $\Rightarrow$ basta trovare sottomatrice 3×3 con $\det \neq 0$

2° modo

Se $a(x+1)^4 + b(x^3+x) + c(x^2+2) =$ polinomio nullo

allora $a=0$ (altrimenti resta x^4)

$\leadsto b=0$ (" " x^3)

$\leadsto c=0$.

— 0 — 0 —

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3 + 1 \rightarrow x^2 + 1$ $x^3 + 2 \rightarrow x^2 + 2$ $x^2 \rightarrow x^2 + 3$ $x \rightarrow x^2 + 4$	$v_1 = 1$ $v_2 = x$ $v_3 = x^2$ $v_4 = x^3$				
--------------------------	--	--	--	--	--	--

ker T_{lin} $\uparrow$ $\nwarrow$ matrice usando base data
ker $\cap$ T_{lin}

Verifichiamo che f esista e sia unica. Devo controllare che i 4 vettori dati siano una base

1	0	0	1
2	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
1	x	x^2	x^3

$\det = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \neq 0$ ok

Chiamati v_1, v_2, v_3, v_4 i vettori in partenza, l'immagine è generata da $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$. Quindi

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(x^2+1, x^2+2, x^2+3, x^2+4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = \max \# \text{ colonne lin. indep.} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Dim Im} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Dim ker} = 2$$

$$\text{Dim ker} + \text{Dim Im} = \text{Dim sp. partenza}$$

" 2 " 4

Troviamo base ker e base Im.

$$\text{Im}(f) = \{x^2+1, x^2+2\}$$

sono contenuti nell'immagine, sono il numero giusto, sono lin. indep.
(potete scegliere 2 a caso dei 4)

Scrivo x^2+3 e x^2+4 come comb. lin. degli altri 2

$$x^2+3 = a(x^2+1) + b(x^2+2) = (a+b)x^2 + (a+2b)$$

$$a+b=1$$

$$a+2b=3 \rightsquigarrow b=2 \rightsquigarrow a=-1$$

$$\text{Quindi } \underbrace{f(v_3)}_{x^2+3} = - \underbrace{f(v_1)}_{x^2+1} + 2 \underbrace{f(v_2)}_{x^2+2} \rightsquigarrow f(\underbrace{v_3 + v_1 - 2v_2}_{\in \text{ker}}) = 0$$

$$x^2+4 = a(x^2+1) + b(x^2+2) = (a+b)x^2 + (a+2b)$$

$$a+b=1$$

$$a+2b=4 \rightsquigarrow b=3 \rightsquigarrow a=-2$$

Quindi

$$f(v_4) = -2f(v_1) + 3f(v_2) \rightsquigarrow f(\underbrace{v_4 + 2v_1 - 3v_2}_{\in \text{ker}}) = 0$$

Non resta che calcolarli esplicitamente:

$$\begin{aligned} v_3 + v_1 - 2v_2 &= x^2 + (x^3 + 1) - 2(x^3 + 2) \\ &= x^2 + x^3 + 1 - 2x^3 - 4 = \boxed{-x^3 + x^2 - 3} \end{aligned}$$

$$v_4 + 2v_1 - 3v_2 = x + 2x^3 + 2 - 3x^3 - 6 = \boxed{-x^3 + x - 4}$$

Stanno nel
ker, sono
in numero
giusto e
sono lin.
indip.
 $\Rightarrow$ base

Se uno volesse $\dim(\ker \cap \text{Im})$?

Farei $\dim(\ker + \text{Im})$

$\uparrow$ generato dai 2 vettori che generano $\ker$
+ 2 vettori che generano Im .

— 0 — 0 —