

SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI

Setting : X sp. vett., V e W s.sp. vettoriali.

Se accade che $V \cap W = \{0\}$ (solo vettore nullo), allora si scrive

$$V + W = V \oplus W$$

↑
somma diretta

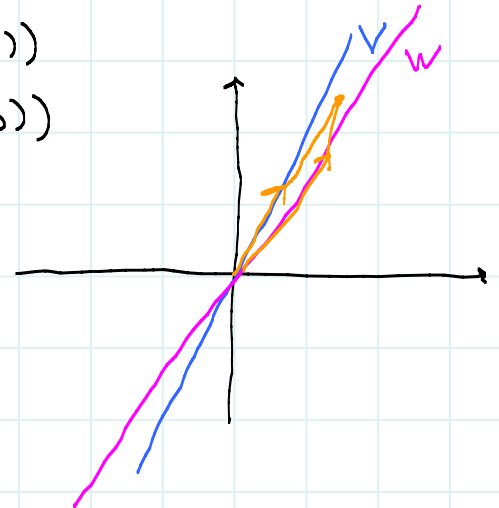
Vantaggio: se la somma è diretta, ogni vettore di $V+W$ si scrive in modo UNICO come $v+w$, con $v \in V$ e $w \in W$

↑ ↑
componenti o proiezioni

Esempio 1 In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $V = \text{Span}((1,2))$
 $W = \text{Span}((2,3))$

Allora

$$\mathbb{R}^2 = V \oplus W$$



È evidente che $V \cap W = \{0\}$, quindi
 $\dim(V+W) = 2 \leadsto$ è tutto $\mathbb{R}^2$

Conseguenza: ogni vettore $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si scrive in modo unico come

$$(x,y) = a(1,2) + b(2,3)$$

(geometricamente: ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è la somma con il parallelogrammo di un vettore in V e uno in W)

Esempio 2 In $\dim 3$ prendiamo $V =$ piano per l'origine

$W =$ retta per l'origine non contenuta nel piano

Ancora una volta $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$

(la somma $V+W$ ha $\dim = 3$ e $V \cap W = \{0\}$)

$\mathbb{R}^3$	(1,2,3)	(4,5,6)	NO		
$\mathbb{R}^3$	$x+y+z=0$	$z=x+y$	NO		
$\mathbb{R}^3$	$x=y=z$	$x+y+z=0$	SI		
$\mathbb{R}^3$	$x-y+z=0$	(1,1,0)	$\begin{matrix} \text{NO} \\ W \subseteq V \end{matrix}$		
$\mathbb{R}^3$	$x-y+z=0$	(1,0,1)	SI		
$\mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 0,1,1 \end{pmatrix}$	(1,1,1)			

V

W

 $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?

①

②

③

④

⑤

⑥

① V e W sono la stessa retta. Quindi

$$V \cap W = V + W = V = W$$

② V e W sono due piani. Può succedere che $V \cap W = \{0\}$?

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V+W) + \dim(V \cap W) & = & \dim(V) + \dim(W) \\ \leq 3 & \quad \quad \quad \downarrow & \quad \quad \quad \uparrow & \quad \quad \quad \uparrow \\ & & \geq 1 & \quad \quad \quad 2 & \quad \quad \quad 2 \end{array}$$

In questo caso i piani sono distinti e l'intersezione è per forza una retta. Quale retta ?

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ y=t \\ x=-t \end{cases} \quad \text{Span}((-1,1,0))$$

③ $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y=z \}$

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \}$$

$$W \text{ è un piano} = \text{Span}((1,0,-1), (0,1,-1))$$

$$V \text{ è una retta} = \text{Span}((1,1,1))$$

Per sapere se $V \cap W = \{0\}$ basta vedere se $\dim(V+W) = 3$

$$\text{Ma } V+W = \text{Span}((1,0,-1), (0,1,-1), (1,1,1))$$

Sono lin. indip. ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1+1+1 = 3 \neq 0 \quad \text{SI!}$$

$$\text{Quindi } \mathbb{R}^3 = V \oplus W$$

$$⑥ \quad V = \text{Span}((1,2,3), (0,1,1)) \quad \leadsto \text{piano}$$

$$W = \text{Span}((1,1,1)) \quad \leadsto \text{retta}$$

Domanda: $V \cap W = \{0\}$? Se sì, allora $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 + 2 - 3 - 1 = -1 \neq 0 \quad \text{OK.}$$

Conseguenza: ogni vettore $u \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come

$$u = v + w$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\in V \text{ (piano)} \quad \in W \text{ (retta)}$

Le applicazioni che ad u assegnano v e w sono applicazioni lineari. Proviamo a scrivere le loro matrici rispetto alla base canonica.

Per farlo basta scrivere nella forma desiderata i 3 vettori della base canonica

$$(1,0,0) = a(1,2,3) + b(0,1,1) + c(1,1,1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in V}$
 $\uparrow \uparrow$
 prima colonna della
 matrice di proiezione
 su V

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in W}$
 $\uparrow \uparrow$
 1^a colonna della matrice di
 proiezione su W

$$(0,1,0) = \dots$$

$$(0,0,1) = \text{stessa cosa}$$

— 0 — 0 —

Esempio più corto In $\mathbb{R}^2$

$$V = \text{Span}((1,1))$$

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y=0\} = \text{Span}((2,-1)) = \text{Span}((-2,1))$$

È vero che $\mathbb{R}^2 = V \oplus W$?

Sì, sono 2 rette distinte per l'origine, quindi $V \cap W = \{0\}$ e le dimensioni sono corrette.

Scriviamo rispetto alla base canonica, le due matrici che rappresentano le componenti rispetto a V e W

$$(1,0) = a(1,1) + b(2,-1) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{\in V} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}_{\in W}$$

$$a+2b=1$$

$$a-b=0$$

$$\leadsto a=b=\frac{1}{3}$$

$$(0,1) = a(1,1) + b(2,-1) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{\in V} + \underbrace{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{\in W}$$

$$a+2b=0$$

$$a-b=1 \leadsto a=b+1 \leadsto 3b+1=0 \leadsto b=-\frac{1}{3} \quad a=\frac{2}{3}$$

Conclusione $pr_V = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad pr_W = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Qual è l'utilità di queste 2 matrici?

Prendiamo un vettore qualunque, tipo $(-2,5) = u$

Applichiamo le due matrici al vettore

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \in V$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \in W \quad (x+y=0)$$

$$\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right) = (-2, 5) \quad \ddot{\smile}$$

Domanda: chi sono $\ker$ e Im delle due matrici?

In entrambi i casi $\ker$ e Im hanno $\dim = 1$.

Inoltre pr_V ha come immagine V e come $\ker$ proprio W

pr_W ha come immagine W e come $\ker$ proprio V .

— 0 — 0 —