

RIEPILOGO STRATEGICO SUI SISTEMI LINEARI

- GAUSS (evergreen)
- Rouché-Capelli (ottimo per sapere se ci sono soluzioni e da quanti parametri dipendono, molto utile quando ci sono parametri)
- CRAMER (permette di trovare la sd. quando è unica, però non è comodissimo)
- matrice inversa (se la sd. di $Ax=b$ è unica, allora è $x=A^{-1}b$)

CRAMER Consideriamo $m \times n$ del tipo $Ax=b$. Allora

$$x_i = \frac{\text{Det } A_i}{\text{Det } A}$$

↑
i-esima comp.
della soluzione

dove A_i è la matrice A in cui abbiamo sostituito la i -esima colonna con b .

Esempio

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x - 8y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}} = \dots$$

$$y = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}} = \dots$$

Utile come strumento teorico, ma se poi devo fare GAUSS per calcolare $\text{Det}(A)$, allora tanto vale usare GAUSS 😊

MATRICE INVERSA VIA DETERMINANTI

Metodo alternativo a GAUSS

Algoritmo in 4 passi

- ① Determinanti $A_{i,j}$
- ② Trasposta
- ③ Segui a scacchiera
- ④ Divido per $\text{Det}(A)$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\text{Det}(A) = 2 + 2 + 3 = 7$$

- ① Per ogni elemento, elimino la sua riga e colonna e calcolo il determinante di ciò che rimane

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- ② Faccio la trasposta

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ③ Cambio i segni a scacchiera

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ④ Divido tutto per 7:

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oss. In dim. 3 è accettabile, dalla 4 in poi sono molto più costosi rispetto a GAUSS.

(La dimostrazione del perché funziona sono gli sviluppi di Laplace).

Esempio 1
$$\begin{cases} ax + 2y = 7 \\ x + 3y = b \end{cases}$$

Studiare al variare dei parametri a e b

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 2 & 7 \\ 1 & 3 & b \end{array} \right) \quad \text{Rango}(A) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \\ 2 & \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 3a - 2 \neq 0 \\ & \Leftrightarrow a \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

(Vediamo anche a occhio che per $a = \frac{2}{3}$ viene $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ per cui la 2ª colonna è 3 volte la 1ª)

- Se $a \neq \frac{2}{3}$, allora $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(A')$, quindi esiste almeno una soluzione, che è unica perché $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{circoquile}}}{2} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rango comune}}}{2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{\# parametri}}}{0}$

- Se $a = \frac{2}{3}$, allora si aprono 2 scenari

→ se $\text{rango}(A') = 2$, allora NO SOLUZIONI (l'ultima colonna è lin. indep. dalle prime)

→ se $\text{rango}(A') = 1$, allora INFINITE SOLUZIONI dipendenti da $2 - 1 = 1$ parametro

Chi decide il rango (A') ?

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{3} & 2 & 7 \\ 1 & 3 & b \end{array} \right) \quad \det = 2b - 21$$

Quindi

- Se $a = \frac{2}{3}$ e $b \neq \frac{21}{2}$, allora NO SOLUZIONI.
- Se $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{21}{2}$, posso anche vedere a mano che succede

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & 7 \\ 1 & 3 & \frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

Nota bene: 2ª riga = $\frac{3}{2}$ · 1ª riga

Per risolvere lavoro alla GAUSS:
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + 2y = 7 \\ x + 3y = \frac{21}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 6y = 21 \\ 2x + 6y = 21 \end{cases}$$

$$y = t, \quad 2x = 21 - 6y = 21 - 6t$$

$$(x, y) = \left(\frac{21}{2} - 3t, t \right) = \underbrace{\left(\frac{21}{2}, 0 \right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{risolve} \\ \text{non omog.}}} + t \underbrace{(-3, 1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{risolve} \\ \text{omog. associato}}}$$

Esempio 2
$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 0 \\ x + by + z = 1 \end{cases}$$

Studiare al variare di a e b il numero di soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 0 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Vedo subito che $\text{Rango}(A') = 2$ (c'è un 2×2 con $\text{Det} \neq 0$)

Quindi si aprono 2 scenari

→ Se $\text{Rango}(A) = 1$, allora NO SOLUZIONI

→ Se $\text{Rango}(A) = 2$, allora $3 - 2 = 1$ ← parametri
 $\uparrow \quad \uparrow$
 incognite rango

(infinita soluzioni dip. da 1 parametro)

Cosa deve succedere per avere $\text{Rango}(A) = 1$?

Barinamente, i 3 sottominoranti 2×2 devono essere $= 0$

$$\begin{cases} ab - 2 = 0 & \rightsquigarrow \text{?} \\ 2 - 3b = 0 & \rightsquigarrow b = \frac{2}{3} \\ a - 3 = 0 & \rightsquigarrow a = 3 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \text{se } a = 3 \text{ e } b = \frac{2}{3}, \text{ allora}$$

NIENTE SOLUZIONI

In realtà bastava imporre 2 qualunque. Perché?

Se viene 0 quello con 1^a e 2^a colonna, allora le prime 2 colonne sono una multipla dell'altra

Se viene 0 quello con 2^a e 3^a colonna, allora le ultime 2 colonne sono una multipla dell'altra

Ma allora (se non sono nulle) sono tutte una multipla dell'altra

Esercizio Prendiamo una matrice A di dim. 6×6 .

Supponiamo che la 5×5 in alto a sx abbia rango 3.

Quanto può valere il rango di A ?



Rango $(A) \geq 3$

Può arrivare fino a 5 !!

può avere rango 4

Aggiungendo ancora una volta posso arrivare a 5

