

SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - y + 7z = -5 \end{cases}$$

1ª interpretazione

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Sto cercando una comb. lineare delle colonne che sia uguale al vettore dei termini noti.

Quindi

→ il sistema ammette **almeno** una soluzione se

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

↑
colonna termini
noti
↑ ↑ ↑
colonne della matrice dei
coeff.

→ il sistema ammette **al più** una soluzione se le colonne della matrice dei coeff. sono lin. indep.

2ª interpretazione Considero l'app. lin. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x - y + 7z)$$

Mi chiedo i valori (x, y, z) t.c. $f(x, y, z) = (6, -5)$

In quest'ottica

→ il sistema ammette **almeno** una soluzione se e solo se $(6, -5) \in \text{Im}(f)$

→ se i termini noti sono nulli, cioè $(0, 0)$, allora risolvere il sistema vuol dire trovare $\ker(f)$

3^a interpretazione

Possiamo sempre scrivere il sistema come

$$A x = b$$

matrice dei coeff. $\nearrow$ $\uparrow$ colonna delle incognite $\nwarrow$ colonna dei termini noti

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ A $\uparrow$ x $\uparrow$ b

Notazione

A si chiama matrice dei coeff. o **MATRICE INCOMPLETA**
 $(A|b) = A'$ si chiama **MATRICE COMPLETA**.
— o — o —

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Consideriamo un sistema di m equazioni in n incognite

$$A x = b$$

matrice $m \times n$ $\nearrow$ $\uparrow$ colonna lunga n $\nwarrow$ colonna lunga m

Allora valgono i seguenti fatti

- Il sistema ammette almeno una sol. $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A')$
- Se il sistema ammette soluzioni, queste dipendono da un numero di parametri uguale a $n - \text{rang}(\text{comune})$
- In particolare, la soluzione è unica se e solo se $n = \text{rang}(\text{comune})$

Oss. Quanto può valere il $\text{rang}(A')$? Solo 2 possibilità

- $\text{rang}(A') = \text{rang}(A)$
 - $\text{rang}(A') = \text{rang}(A) + 1$
- } se aggiungo una colonna, il rango può solo restare = oppure salire di 1

Struttura delle soluzioni di un sistema lineare

La soluzione di un sistema del tipo $Ax = b$ è sempre del tipo

base delle soluzioni del sistema $Ax = 0$, cioè

una base del ker se lo pensiamo come applicazione

$$x = x_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

soluzione particolare del sistema $Ax = b$

parametri liberi

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - y + 7z = -5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & -5 \end{array} \right)$$

In questo caso $\text{rank}(A) = \text{rank}(A') = 2$ (ci sono 2 righe e non sono lin. dip., oppure c'è una sottomatrice 2×2 con $\det \neq 0$)

RC $\Rightarrow$ la soluzione generale dipende da $n - \text{rank} = 3 - 2 = 1$ parametri

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & -15 & 16 \end{array} \right)$$

$$z = t, \quad 5y = 16 + 15t \rightsquigarrow y = \frac{16}{5} + 3t$$

$$2x = 6 + z - 3y = 6 + t - \frac{48}{5} - 9t = -\frac{18}{5} - 8t$$

$$\text{Soluzione generale: } (x, y, z) = \left(-\frac{9}{5} - 4t, \frac{16}{5} + 3t, t \right)$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{9}{5}, \frac{16}{5}, 0 \right)}_{x_0} + t \underbrace{(-4, 3, 1)}_{v_1}$$

soddisfa il sistema dato NON OMOG.

soddisfa il SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO

$$Ax = 0$$

Oss. Buono a sapersi quando bisogna fare la verifica!

Perché funziona Rouché - Capelli ?

→ Se $\text{rang} A = \text{rang} (A|b)$, vuol dire che b è Span delle colonne di A , e viceversa

→ Quando i ranghi sono uguali, il numero dei parametri è $\dim(\ker(A))$, ma

$$\dim(\ker(A)) + \underbrace{\dim(\text{Im}(A))}_{\text{rang}(A)} = \underbrace{\dim \text{sp. portante}}_n$$

da cui

$$\dim(\ker(A)) = n - \text{rang}(A).$$

Oss. RC non trova le soluzioni, ma dice se ci sono e quante.

Esempi Consideriamo

$$\begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y + 3z = 3 \\ 2y - z = b \end{cases}$$

Determinare il numero di soluzioni al variare di a e b .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & b \end{array} \right)$$

1° oss. $\text{Rang}(A') \geq \text{Rang}(A) \geq 2$
(basta trovare 2×2 con $\det \neq 0$)

2° oss. $\text{Rang}(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2 - 2a + 1 - 12 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = -9 \Leftrightarrow a \neq -\frac{9}{2}$$

Quindi: se $a \neq -\frac{9}{2}$, allora di sicuro il sistema ha SOL.UNICA, indip. da b ($\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$ e il numero dei parametri è $3 - 3 = 0$)

Resta solo il caso $a = -\frac{9}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \frac{9}{2} & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & b \end{array} \right)$$

Se $\text{rank}(A') = 3 \leadsto \text{NO SOLUZIONI}$

Se $\text{rank}(A') = 2 \leadsto$ esistono soluzioni dipendenti da
 $3 - 2 = 1$ parametro.

Quando è che $\text{rank}(A') = 2$?

Basta imporre che il Det senza la prima colonna sia $= 0$

$\leadsto$ trovo una condizione su b (già sappiamo che la 1ª colonna
è combinazione lin. di 2ª e 3ª colonna, se $\text{Det} = 0$ allora
anche la 4ª colonna è comb. lin. di 2ª e 3ª).

— 0 — 0 —