

FORMULA MISTERIOSA

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\underset{M_1}{\text{Det} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}}, - \underset{M_2}{\text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}}, \underset{M_3}{\text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}} \right)$$

Quale proprietà ha (M_1, M_2, M_3) ?

Ha prodotto scalare nullo con (a_1, a_2, a_3) e con (b_1, b_2, b_3) .

Perché è vero?

Consideriamo $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ $\text{Det} = 0$ (ci sono 2 righe =)

Se faccio LAPLACE prima riga ottengo

$$\text{Det} = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 = \langle (a_1, a_2, a_3), (M_1, M_2, M_3) \rangle$$

↑
il segno -
è già in M_2

Allo stesso modo, partendo a $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ ottengo

$$0 = \underset{\substack{\uparrow \\ R_1=R_3}}{\text{Det}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LAPLACE}}}{\text{Det}} = b_1 M_1 + b_2 M_2 + b_3 M_3 = \langle (b_1, b_2, b_3), (M_1, M_2, M_3) \rangle$$

Esiste una formula misteriosa in $\mathbb{R}^4$? Se voglio un vettore $\perp$ a 3 vettori dati in $\mathbb{R}^4$, basta partire da una matrice 4×4 con * nella prima riga e i 3 vettori dati nelle altre, e immaginare di fare Laplace. (L'alternativa è risolvere il sistema lineare)

Esercizio 1

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^3 - x^2$ $v_2 = x^2 - x$ $v_3 = x - x^3$			
--------------------------	---	--	--	--

Stile domande: lin. indep.? Dim. Span.?

Una volta: $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \dots$ risolvo e vedo se $a=b=c=0$

Oggi:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{matrix}$$

Si vede a occhio che

$$v_1 + v_2 = -v_3$$

$$\text{quindi } v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

quindi sono lin. dip., e

quindi uno qualunque si può eliminare e i 2 che restano sono lin. indep. (non sono multipli)

Oggi il rango della matrice è 2 e si può vedere con i Det.

Devo fare 2 verifiche

→ Esiste sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$.

→ TUTTE le 4 sottomatrici 3×3 hanno $\text{Det} = 0$. Infatti

- se non elimino l'ultima colonna, resta una colonna di 0, quindi $\text{Det} = 0$ per Laplace
- se elimino l'ultima, calcolo con SARRUS il Det. delle prime 3, e ottengo $1 + (-1) + (0) - 0 - 0 - 0 = 0$.

Conclusione: $\dim(\text{span}) = 2$ e posso eliminare chi voglio.

Esercizio 2

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$\begin{aligned}v_1 &= x^2 + 2x + 3 \\v_2 &= x^3 - 2x^2 + 1 \\v_3 &= 2x^3 + x^2 + x + 1 \\v_4 &= x^3 - x\end{aligned}$
--------------------------	--

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A occhio non vedo nulla
Lavoriamo alla GAUSS e vediamo che succede

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il Determinante è cambiato di segno
Faccio SARRUS sul 3×3
 $-1 - 4 - 15 - 6 + 10 - 1 \neq 0$

Conclusione: i 4 vettori sono lin. indep. $\Rightarrow$ sono una base
di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

— o — o —

Esercizio 3

$$\left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \\ \left(\begin{array}{c} (0,0,1,1) \\ (0,1,1,0) \\ (1,1,0,0) \end{array} \right) \right| \left| \begin{array}{c} (1,1,1,1) \\ (2,0,-2,0) \end{array} \right| \right|$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_V \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_W$

Dimensione e base di $V, W, W+V, W \cap V$

$\dim(W) = 2$ (sono 2 e sono lin. indep.)

$\dim(V) = 3$ Spero che la matrice abbia rango 3. Come dim.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che rango = 3 ?

Basta trovare una sottomatrice 3×3 con $\text{Det} \neq 0$

$\uparrow \text{Det} = -1 \leadsto \text{Rango } 3$

So che la somma $V+W$ è lo span dei 5 vettori

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \underline{2} & \underline{0} & \underline{-2} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Può essere rango = 5? NO, perché al max ho 4 colonne lin. indep.

Fatto generale: se M è matrice $m \times n$, allora
 $\text{rango}(M) \leq \min\{m, n\}$

Può avere rango = 4? SI Basta trovare una sottomatrice 4×4
 con $\det \neq 0$

Cancellando la 4ª riga, ciò che resta ha

$$\det = -1 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot [-2 + 2] = 0 \quad \ddot{\smile}$$

$\uparrow$
 $R_2 - R_1 = \frac{1}{2} R_3$

Eliminando l'ultima riga resta, facendo Laplace 1ª riga ...

... conti ... $\det = 0$

Perché $R_4 = R_1 + R_3$ Ma avevamo già visto che

$$R_5 = 2R_3 - 2R_2$$

Conclusione

$$\text{Span}(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) = \text{Span}(R_1, R_2, R_3)$$

$\uparrow$
 perché R_4 ed R_5 si possono eliminare perché
 si scrivono come comb. lin. di R_1, R_2, R_3

Quindi $V+W = V$ e quindi ha $\dim = 3$.

Ma allora $W \subseteq V$ per cui $W \cap V = W$ e ha dimensione 2

— 0 — 0 —