

DETERMINANTE RANGODeterminante : 2 modi di vederlo**1° modo** INPUT: matrice $n \times n$ (quadrata)

OUTPUT: numero

Prop. essenziale: la matrice è invertibile $\Leftrightarrow$ numero $\neq 0$
 $\uparrow$
 ammette matrice inversa

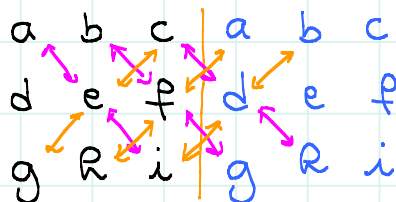
2° modo INPUT: n vettori in uno sp. vett. di dim n

OUTPUT: numero

Prop. essenziale: gli n vettori sono lin. indip. $\Leftrightarrow$ numero $\neq 0$
 " " " " LIN. DIP. $\Leftrightarrow$ numero $= 0$

COME SI CALCOLA**Caso 2×2** Formula

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Caso 3×3 Formula di SARRUS

$$\text{Det} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

6 termini:
 3 con il +
 3 con il -

In breve

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \underbrace{aei} + \underbrace{bfg} + \underbrace{cdh} - ceg - bdi - afh$$

Oss. In dimensione + alta usi valgono formule analoghe

Caso $n \times n$ Due modi (in realtà di più)

- ① via algoritmo di GAUSS
- ② via sviluppi di LAPLACE
- ③ " " " LEIBNIZ (praticamente è scomodo)

Determinante via GAUSS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ \\ R_4 - 3R_1 \end{array}$$

Lavoriamo alla GAUSS facendo solo operazioni ORTODOSSE

$$R_i \rightsquigarrow R_i + a R_j$$

↑
ci deve essere coeff. = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_4 + 6R_2$ $R_4 + \frac{21}{3}R_3$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{26} \end{pmatrix}$$

A questo punto

Det = prodotto dei tizi sulla diagonale
cambiato di segno tante volte quanto è
il numero di scambi di righe fatti per
strada.

$$= \underbrace{-78}_{\text{prod. sulla diag}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{c'è stato uno} \\ \text{scambio} \\ \text{di riga}}} = 78$$

DETERMINANTE VIA LAPLACE

Sviluppo ricorsivo

↑
insegua a calcolare il Det $m \times m$

Se uno sa quello $(m-1) \times (m-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

→ Scegliamo una riga o colonna che ci piaccia (prima riga)

$$\begin{aligned} \text{Det (Matrice)} &= 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \text{svolgo i conti e dovrebbe venire } 78 \end{aligned}$$

Come si prendono i segni: alternati seguendo uno schema a scacchiera del tipo

in alto a
sx c'è il
segno +

$$\begin{array}{ccccc} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{array}$$

Oss. Conviene LAPLACE quando c'è una riga/colonna che contiene tanti 0!

La cosa sorprendente è che viene fuori sempre lo stesso numero, comunque io lavoro!

Esempio

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il Det: (quarta colonna)

$$2 \cdot 3 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 (35 + 8 - 8 - 80 + 2 - 14)$$

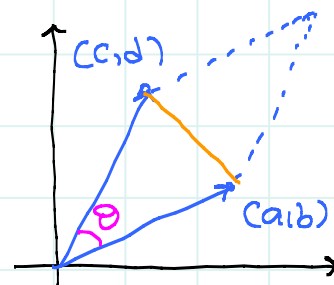
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Caso 2×2 $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$ (a meno del segno) l'area del parallelogramma generato dai vettori (a,b) e (c,d)

$$\text{Area} = |\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}|$$

Questo evidenzia che $\text{Det} = 0 \Leftrightarrow$
 $\text{area} = 0 \Leftrightarrow$

(a,b) e (c,d) sono l'uno multiplo dell'altro $\Leftrightarrow$
 (a,b) e (c,d) sono lin. dip.



Come calcolo l'area del parallelogramma?

Area parallelogramma = 2 area triangolo

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \|(a,b)\| \cdot \|(c,d)\| \cdot \sin \theta$$

soliti
conti

$$\uparrow = \|(a,b)\| \cdot \|(c,d)\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle (a,b), (c,d) \rangle^2}{\|(a,b)\|^2 \|(c,d)\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|(a,b)\|^2 \|(c,d)\|^2 - \langle (a,b), (c,d) \rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}$$

$$= \dots \sqrt{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd}$$

$$= \sqrt{(ad-bc)^2} = |ad-bc|$$