

	B	$\hat{B}$			
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (-1, 4)$ $v_2 = (2, 5)$	$w_1 = (1, 6)$ $w_2 = (1, 7)$			
			$C \rightarrow B$	$C \rightarrow \hat{B}$	$\hat{B} \rightarrow B$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow e_1$ Dalla B alla canonica (le colonne sono le comp. della B rispetto alla canonica)
 $\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow e_2$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_2$

La matrice dalla canonica alla B è l'inversa

$$\frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$C \rightsquigarrow B$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ Dalla $\hat{B}$ alla canonica

$$\frac{1}{1} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$C \rightarrow \hat{B}$

Per fare $\hat{B} \rightarrow B$ considero $\hat{B} \rightarrow C \rightarrow B$

$$\frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \text{si calcola}$$

$C \rightarrow B \quad \hat{B} \rightarrow C$

Esempio 3×3

$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 2, 1)$ $v_2 = (2, 3, 0)$ $v_3 = (0, 1, 1)$	$w_1 = (1, 2, 0)$ $w_2 = (0, -1, 1)$ $w_3 = (3, 1, 4)$
	B	$\hat{B}$

Voglio il cambio di base $\hat{B} \rightsquigarrow B$

Quasi gratis $\hat{B} \rightarrow C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Scriviamo $B \rightarrow C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e Facciamo l'inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$C \rightarrow B$

Conclusione : la matrice $\hat{B} \rightarrow B$ e

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \dots$$

$\uparrow$ INPUT: C $\uparrow$ INPUT: $\hat{B}$
OUTPUT: B OUTPUT: C
— 0 — 0 —

$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (3, 1)$ $e_2 = (5, 2)$	$(0, -1)$	$(2, -1)$
----------------	----------------------------------	-----------	-----------

B

Scrivere le componenti dei due vettori dati rispetto alla base "strana" $\{e_1, e_2\}$

PASSATO

$$(0, -1) = a(3, 1) + b(5, 2) \leadsto \text{trovo } a \text{ e } b$$

$$(2, -1) = a(3, 1) + b(5, 2) \leadsto "$$

ADESSO

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dalla strana alla canonica

$$\frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dalla canonica alla strana

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$5(3, 1) - 3(5, 2) = (0, -1) \quad \ddot{\smile}$$

$$9(3, 1) - 5(5, 2) = (2, -1) \quad \ddot{\smile}$$

$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$e_1 = x^2 + 1$ $e_2 = x - 2$ $e_3 = x + 3$	x	$x^2 - 3x + 2$	canonica $\{1, x, x^2\}$
--------------------------	---	-----	----------------	-----------------------------

PRIMA

$$x = a(x^2 + 1) + b(x - 2) + c(x - 3) \text{ e risolvo}$$

ORA

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla strana alla canonica

Basta calcolare M^{-1} con Gauss e poi fare M^{-1} applicato ai 2 vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e poi fare la verifica

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(2x - 3y, x + 4y)$	$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (1, 3)$	$w_1 = (1, 4)$ $w_2 = (1, 5)$
$\uparrow$ V	$\uparrow$ W	$f: V \rightarrow W$	$\uparrow$ base di V	$\uparrow$ base di W

Determinare la matrice di f usando in partenza la base $\{v_1, v_2\}$ e in arrivo la base $\{w_1, w_2\}$

PRIMA Calcolo $f(v_1) = (-4, 9) = a(1, 4) + b(1, 5)$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$
 prima colonna della matrice

$f(v_2) = (-7, 13) = c(1, 4) + d(1, 5)$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$
 seconda colonna della matrice

* * $\leftarrow w_1$
 * * $\leftarrow w_2$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

INPUT: componenti di $v \in V$ risp. alla base $\{v_1, v_2\}$

OUTPUT: " di $f(v) \in W$ " $\{w_1, w_2\}$

ORA	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(2x - 3y, x + 4y)$	$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (1, 3)$	$w_1 = (1, 4)$ $w_2 = (1, 5)$
------------	----------------	----------------	---------------------	----------------------------------	----------------------------------

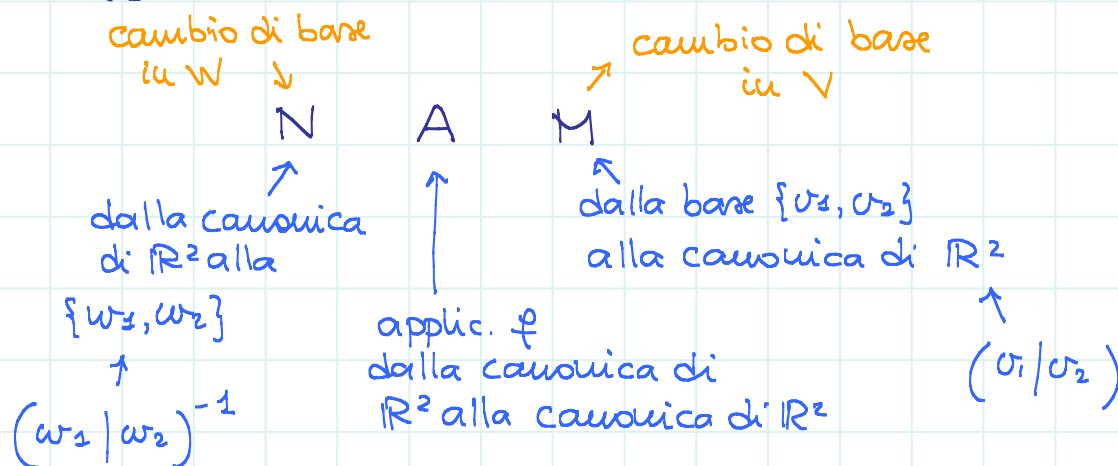
Scrivo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Osservo che $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + 4y \end{pmatrix}$

quindi A rappresenta f tra le basi CANONICHE.

La matrice che mi è richiesta la posso scrivere come prodotto di 3 matrici:



Conclusione: La matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -48 \\ 25 & 41 \end{pmatrix}$$

↑
Rappresenta f dalla base $\{v_1, v_2\}$ alla base $\{w_1, w_2\}$

vediamo se funziona

$$(-4, 9) = a(1, 4) + b(1, 5)$$

↑ ↑
prima colonna della mat.

$$-29(1, 4) + 25(1, 5) = (-4, 9) \quad \text{😊}$$

$$(-7, 13) = c(1, 4) + d(1, 5)$$

↑ ↑
second "

$$-48(1, 4) + 41(1, 5) = (-7, 13) \quad \text{😊}$$