

Teorema di struttura delle applicazioni lineari

Siano V e W due sp. vettoriali

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V

Siano $w_1, \dots, w_m$ vettori qualunque di W (non necess. una base)

Allora esiste un' unica appl. lineare $f: V \rightarrow W$ tale che

$$f(v_i) = w_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m$$

(Brutalmente: posso mandare dove mi pare una base dello sp. di partenza, e l'applic. lin. è univocamente determinata)

Dato $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ e allora

$$\begin{aligned} f(v) &= f(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) \\ &= a_1 \underbrace{f(v_1)}_{w_1} + \dots + a_m \underbrace{f(v_m)}_{w_m} \end{aligned}$$

Esempi

	V	W	Condizioni	E/U		V	W	Condizioni	E/U	
①	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$v_1 (1,2) \rightarrow (2,3)$ $v_2 (1,3) \rightarrow (7,8)$	E U		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(2,4) \rightarrow (7,8)$		②
③	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(2,4) \rightarrow (4,6)$			$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(1,3) \rightarrow (2,3)$		④

① Esiste $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f(1,2) = (2,3)$ e $f(1,3) = (7,8)$? Se sì, è unica?

Provo con il teo. struttura. Se quelli dati in partenza sono una base, allora f esiste ed è unica

Ora v_1, v_2 sono una base di $\mathbb{R}^2$ (sono in numero giusto, e non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono LIN. INDIP.)

Non serve nessuna propr. speciale di w_1 e w_2

Chi sono $\ker$ e Im ?

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Span}(f(v_1), f(v_2)) \\ &= \text{Span}(w_1, w_2) \\ &= \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
sono lin. indip

$\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$ perché ha dim 0 per RN

Chi è la matrice di f usando in partenza la base v_1, v_2 e in arrivo la base w_1, w_2 .

$$\begin{aligned}f(v_1) &= w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \\ f(v_2) &= w_2 = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2\end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

Chi è la matrice di f usando in partenza ed arrivo la base canonica? $e_1 = (1, 0) \quad e_2 = (0, 1)$

1° modo Cerco di usare la definizione

$$\begin{aligned}f(1, 0) &= f(3v_1 - 2v_2) = 3f(v_1) - 2f(v_2) = 3(2, 3) - 2(7, 8) \\ &= (-8, -7) = -8e_1 - 7e_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(0, 1) &= f(v_2 - v_1) = f(v_2) - f(v_1) = (7, 8) - (2, 3) \\ &= (5, 5) = 5e_1 + 5e_2\end{aligned}$$

La matrice è

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

2° modo (Bovino puro)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Quali proprietà deve avere?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ c + 2d = 3 \\ a + 3b = 7 \\ c + 3d = 8 \end{cases}$$

risolvendo trovo la stessa di prima

Un giorno ci saranno 3° e 4° modo.

V	W	Condizioni	E/U	V	W	Condizioni	E/U
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(1,3) \rightarrow (7,8)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\begin{matrix} \omega_1 & (1,2) \rightarrow (2,3) \\ \omega_2 & (2,4) \rightarrow (7,8) \end{matrix}$	N.E. ②
③ $\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\begin{matrix} \omega_1 & (1,2) \rightarrow (2,3) \\ \omega_2 & (2,4) \rightarrow (4,6) \end{matrix}$	$\begin{matrix} E \\ \checkmark \end{matrix}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\begin{matrix} \omega_1 & (1,2) \rightarrow (2,3) \\ \omega_2 & (1,3) \rightarrow (2,3) \end{matrix}$	E.U.

↑ sono una base

② $f(1,2) = (2,3) \quad f(2,4) = (7,8)$

Posso usare teo. struttura? NO: $\{\omega_1, \omega_2\}$ NON sono una base
 $\Rightarrow$ BOH (il solo teo. struttura non ci aiuta)

Osservo che $\omega_2 = 2\omega_1$, quindi dovrebbe essere $f(\omega_2) = 2f(\omega_1)$ e non lo è, quindi f NON esiste

③ $f(1,2) = (2,3)$

$f(2,4) = (4,6)$

è conseguenza della precedente!
 (quindi si può eliminare)

In questo caso f esiste, ma NON è unica.

Completato $(1,2)$ ad una base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio aggiungendolo $(1,0)$
 $\{(1,2), (1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$
 $\{(1,2), (25,74)\}$ PURE

Per il teorema di struttura esiste $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.

$f(1,2) = (2,3)$

$f(1,0) = \text{quello che voglio}$

Oss. Provare nei casi ② e ③ a cercare la matrice con il metodo bovino.

Nel caso ② il sistema viene impossibile

" ③ il sistema ha ∞ soluzioni, dipendenti da 2 parametri
 (posso mandare $(1,0)$ in un qualunque A, B)

①	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(1,1) \rightarrow (-1,-2)$ $(2,3) \rightarrow (1,0)$	$\nexists$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \rightarrow (2,3)$ $(1,1) \rightarrow (-1,-2)$ $(2,3) \rightarrow (1,1)$	$E \cup$	②
③	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \rightarrow (1,2,3)$ $(2,2) \rightarrow (1,2,3)$	$\nexists$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \rightarrow (1,0,-1)$ $(-1,-1) \rightarrow (-1,0,1)$	$E \setminus$	④
⑤	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,-1) \rightarrow (1,2,3)$ $(2,2) \rightarrow (1,2,3)$	E.U.	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \rightarrow (0,0,0)$ $(12,11) \rightarrow (-1,0,1)$	E.U.	⑥

$\uparrow$
base in partenza
 $\uparrow$
base in partenza

⑥ E.U. $\text{Im}(f) = \text{Span}((0,0,0), (-1,0,1))$
 $= \text{Span}((-1,0,1)) \leadsto \dim(\text{Im}) = 1$

$\dim(\ker(f)) = 1 \quad \ker(f) = \text{Span}((1,1))$

③ Se $f(1,1) = (1,2,3)$, allora per forza $f(2,2) = (2,4,6)$

④ La seconda cond. è inutile e resta solo

$f(1,1) = (1,0,-1)$

$f(37,42) = \text{quello che mi pare}$

① $v_3 = v_1 + v_2$ MA $f(v_3) \neq f(v_1) + f(v_2)$

② La 3^a cond. segue dalle prime 2, quindi è inutile.
 Le prime 2 determinano f univocamente

— o — o —