

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x-y, y, y-x)$	$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (1, 3)$	$w_1 = (1, -2, 0)$ $w_2 = (0, 2, 1)$ $w_3 = (1, 1, 1)$
----------------	----------------	-----------------	----------------------------------	--

$$f(x, y) = (x-y, y, y-x)$$

È lineare? Sì, per i soliti motivi

$$\ker(f) \begin{cases} x-y=0 \\ y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \leadsto y=0 \overset{x=0}{\nearrow} \Rightarrow \ker(f) = \{0\}$$

$\text{Im}(f)$: $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, quindi l'immagine è un piano di $\mathbb{R}^3$

Di quale piano si tratta?

In generale, se $v_1, \dots, v_m$ sono una base dello sp. di partenza, allora

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_m))$$

questi possono essere lin. dip.

Nel vostro caso

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Span}(f(1,0), f(0,1)) \\ &= \text{Span}((1,0,-1), (-1,1,1)) \end{aligned}$$

sono indipendenti

(se voglio la cartesiana del piano, basta usare form. misteriosa)

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x-y, y, y-x)$	$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (1, 3)$	$w_1 = (1, -2, 0)$ $w_2 = (0, 2, 1)$ $w_3 = (1, 1, 1)$
----------------	----------------	-----------------	----------------------------------	--

Se voglio la matrice usando queste basi strane...

$$f(v_1) = (1, 0, -1) = a(1, -2, 0) + b(0, 2, 1) + c(1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ -2a + 2b + c = 0 \\ b + c = -1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$a = 1 - c = -3$$

$$2b + 3c = 2 \leadsto 2b = 2 - 3c = -10 \leadsto b = -5$$

$$c = 4$$

$$\varphi(v_2) = (-2, 3, 2) = a(1, -2, 0) + b(0, 2, 1) + c(1, 1, 1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$c = -3 \quad 2b + 3c = -1 \leadsto 2b = -1 - 3c = 8 \leadsto b = 4$$

$$a = -2 - c = 1$$

La matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\varphi(v_1) \quad \varphi(v_2)$

$$\begin{matrix} \mathbb{V} & \mathbb{W} \\ \mathbb{R}_{\leq 3}[x] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{---} & 0 & \text{---} & 0 & \text{---} \\ & (p(1), p(2)) & \end{matrix}$$

Input: polinomio di grado ≤ 3

Output: vettore di $\mathbb{R}^2$ le cui componenti sono $(p(1), p(2))$

La verifica della linearità è immediata (se uno ha chiaro cosa vuol dire)

$$\boxed{\ker(\varphi)} \quad \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\ker(\varphi)) \geq 2$$

$$\ker(\varphi) = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : (p(1), p(2)) = (0, 0) \}$$

$$\text{Scrivo } p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$p(1) = a + b + c + d = 0$$

$$p(2) = a + 2b + 4c + 8d = 0$$

$$a + b + c + d = 0$$

$$d = t, c = s, b = -3s - 7t$$

$$b + 3c + 7d = 0$$

$$a = -b - c - d = 3s + 7t - s - t = 2s + 6t$$

↑ ↑

$$(a, b, c, d) = (2s + 6t, -3s - 7t, s, t)$$

$$= s(2, -3, 1, 0) + t(6, -7, 0, 1)$$

$$\ker(\varphi) = \text{Span}(2 - 3x + x^2, 6 - 7x + x^3)$$

↑ ↑
verifica che questi
polinomi soddisfanno
 $p(1) = p(2) = 0$.

$\text{Im}(\varphi)$: ha $\dim = 2$ ed è contenuta in $\mathbb{R}^2$,

quindi $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$

quindi φ è SURGETTIVA

Matrice tra le basi canoniche

In partenza

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = x$$

$$v_3 = x^2$$

$$v_4 = x^3$$

In arrivo

$$w_1 = (1, 0)$$

$$w_2 = (0, 1)$$

$$\varphi(v_1) = (1, 1) = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$$

$$\varphi(v_2) = (1, 2) = 1 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2$$

$$\varphi(v_3) = (1, 4)$$

$$\varphi(v_4) = (1, 8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

— o — o —

$M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$	$A + A^t$
---	-----------

Lineare? $\varphi(\lambda A) = \lambda A + (\lambda A)^t = \lambda A + \lambda A^t = \lambda(A + A^t) = \lambda \varphi(A)$

$$\varphi(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) + (A_1 + A_2)^t$$

$$= A_1 + A_2 + A_1^t + A_2^t \quad (\text{cosa succedeva con il prodotto?})$$

$$= (A_1 + A_1^t) + (A_2 + A_2^t)$$

$$= \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$$

$$\boxed{\ker(\varphi)} \quad \left\{ A \in M_{2 \times 2} : A + A^t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice } 2 \times 2 \text{ nulla}}}{0} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A + A^t &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

se e solo se

$$\begin{cases} 2a = 0 & a = d = 0 & b = -c \\ b + c = 0 \\ c + b = 0 \\ 2d = 0 \end{cases}$$

Quindi $\ker(\varphi)$ sono tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$

Quindi $\boxed{\ker(\varphi) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$

Quindi $\dim(\ker(\varphi)) = 1$.

$\boxed{\text{Im}(\varphi)}$ $\text{RN} \Rightarrow \dim(\text{Im}(\varphi)) = 3 \Rightarrow \varphi$ non è surgettiva
Chi è una base dell'immagine?

Prendo $v_1, \dots, v_4$ base di $M_{2 \times 2}$ e $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_4)$ sono generatori di $\text{Im}(\varphi)$ (non sono una base perché sono troppi)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(v_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una base dell'immagine è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Un'altra base è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Chi è la matrice di f usando v_1, v_2, v_3, v_4 in partenza ed arrivo?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \\ \leftarrow v_4 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \ f(v_2) \ f(v_3) \ f(v_4)$

— 0 — 0 —