

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Siano V e W sp. vett. Un'appl. lin. è una $f: V \rightarrow W$ t.c.

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$

(ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

Def. Sia $f: V \rightarrow W$ lineare. Si definisce

→ KER o NUCLEO di f l'insieme
 $\uparrow$
KERNEL

$$\{v \in V : f(v) = 0\} = \text{Ker}(f) \subseteq V$$

$\uparrow$
0 di W

→ $\text{Im}(f) := \{f(v) : v \in V\} \subseteq W$

Fatti principali

- ① $\text{Ker}(f)$ è un s.sp. vett. di V
- ② $\text{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W
- ③ Vale il teorema RANK-NULLITY

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$$

$\uparrow$
sp. contenuta

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Siano V e W sp. vett. di dimensione finita

Sia $f: V \rightarrow W$ una appl. lineare

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V (quindi $\dim(V) = m$)

Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base di W (quindi $\dim(W) = n$)

Costruiamo una matrice $m \times n$ in questo modo

Calcolo

$$f(v_1) = \underbrace{a_{1,1}}_{\uparrow \text{prima colonna della matrice}} w_1 + \underbrace{a_{2,1}}_{\uparrow} w_2 + \dots + \underbrace{a_{n,1}}_{\uparrow} w_n$$

$$f(v_2) = \underbrace{a_{1,2}}_{\uparrow} w_1 + \underbrace{a_{2,2}}_{\uparrow} w_2 + \dots + \underbrace{a_{n,2}}_{\uparrow} w_n$$

seconda colonna della matrice

Si prosegue allo stesso modo fino a $f(v_m)$.

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \\ \vdots \end{matrix}$$

$\uparrow f(v_1) \quad \uparrow f(v_2)$

Morale: scelta una base in partenza ed in arrivo, ad f risulta associata una matrice A

(se cambio basi, cambia la matrice)

Utilità Supponiamo di voler calcolare $f(v)$ per un certo $v \in V$.

Posso seguire questa procedura

→ scrivo v come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ cioè

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$$

→ Moltiplico A per il vettore colonna che ha come componenti $x_1, \dots, x_m$

$m \times m$ matrix $\times$ column vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ of size m

→ Ottengo un vettore colonna lungo n , con componenti

$$y_1, \dots, y_m$$

→ Allora

$$\underbrace{f(v)}_{=0} = \underbrace{y_1}_{=0} \underbrace{w_1}_{=0} + \dots + \underbrace{y_m}_{=0} \underbrace{w_m}_{\text{dim ker dim Im}}$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$(x - y, 2x + y)$			
$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$(x - y, y - x)$			
$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	$(x + y + z, 2x - z, 3x + 2y + z)$			

①

① $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = (x - y, 2x + y)$

Bisognerebbe verificare che è lineare, cioè

→ Somma

$$f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \stackrel{?}{=} f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$$

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - y_1, 2x_1 + y_1) + (x_2 - y_2, 2x_2 + y_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

→ Prodotto per costante

$$f(\lambda(x, y)) \stackrel{?}{=} \lambda f(x, y)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x - \lambda y, 2\lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(x - y, 2x + y) \\ &= \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

Come calcolo il ker?

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (0, 0)$$

$$(x - y, 2x + y) = (0, 0)$$

Quindi devo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ 3y=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

L'unica soluzione è $(0,0)$, quindi $\ker(f) = \{0\}$
 $\uparrow$
 $0 \text{ di } \mathbb{R}^2$

Quindi $\dim \ker(f) = 0$

Come trovo la dim. dell'immagine?

$$\text{RN} \Rightarrow \dim \ker + \dim \text{Im} = \dim (\text{sp. partenza})$$

$\begin{matrix} 0 & 2 & 2 \end{matrix}$

Quindi $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, quindi $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (è un s.sp. dell'insieme di arrivo, che è $\mathbb{R}^2$, di $\dim = 2$, e quindi è tutto $\mathbb{R}^2$)

Oss. Questo ci dice che ogni vettore dello spazio di arrivo è f di qualcosa, cioè dato $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ posso trovare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\underbrace{(x-y, 2x+y)}_{f(x,y)} = (A,B)$$

cioè posso risolvere il sistema

$$\begin{cases} x-y = A \\ 2x+y = B \end{cases}$$

Calcolare la matrice di f usando in partenza ed arrivo le basi canoniche $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,2) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (-1,1) = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) \end{matrix}$

Il giorno in cui voglio fare $f(5, -7)$, posso

1: applicare la regola di f $f(5, -7) = (12, 3)$

2 : Utiliser la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$(x + y - z, z - 3x)$
---	-----------------------

$$f(x, y, z) = (x + y - z, z - 3x)$$

Calcolo ker (f)

Non può essere $\ker(\varphi) = \{0\}$ perché

$$\dim(\ker) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im})}_{\leq 2} = \underbrace{\dim(\text{sp. portenza } a)}_3$$

$\downarrow$
 deve essere
 almeno uno

perché
 $\operatorname{Im} \subseteq W$

Fatto generale: se $\dim(W) < \dim(V)$, allora $\dim(\ker) \geq 1$

e anzi $\dim(\ker) \geq \dim(V) - \dim(W)$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -3x+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice tra le basi canoniche)

$$z = 3t, \quad y = 2t, \quad x = z - y = t \quad (t, 2t, 3t)$$

$$\ker(\varphi) = \text{Span}((1, 2, 3)) \leftarrow \text{verifica ok}$$

Quindi $\dim(\ker) = 1$ e di conseguenza $\dim(\text{Im}) = 2$, quindi

$\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$ per il solito motivo.

1 0 1 0 1