

|                |                                                                                                |                           |   |                         |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|---|-------------------------|
| $\mathbb{R}^4$ | $v_1 = (1, 0, 1, 0)$<br>$v_2 = (0, -1, 1, 1)$<br>$v_3 = (1, 1, 0, -1)$<br>$v_4 = (0, 0, 1, 1)$ | $SI$<br>$v_1 = v_2 + v_3$ | 3 | $v_1$<br>$v_2$<br>$v_3$ |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|---|-------------------------|

Vediamo se sono indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a + c = 0 \quad d = 0 \quad c = t \quad b = t \quad a = -t$$

$$-b + c = 0 \quad \text{Come nell'esempio prec.}$$

$$d = 0 \quad -v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$0 = 0$$

Si può verificare che se eliminiamo uno a caso tra  $v_1, v_2, v_3$ , i rimanenti sono indipendenti

Esempio finale

$$v_1 = (1, 0, 1, 0)$$

$$v_2 = (1, 1, 0, 0)$$

$$v_3 = (2, 0, 2, 0)$$

$$v_4 = (3, 1, 2, 0)$$

Si vedono a occhio le relazioni

$$v_3 = 2v_1$$

$$v_4 = v_2 + v_3$$

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) \xrightarrow{\text{elimino } v_4} \text{Span}(v_1, v_2, v_3) \xrightarrow{\text{elimino } v_3} \text{Span}(v_1, v_2) \xrightarrow{\text{liu. indep.}}$$

$\dim = 2$ . Ho davvero tante possibilità di eliminazione.

Basta che i due restanti siano lin. indep. (ogni coppia fra  $v_1, v_2, v_4$  può essere eliminata).



②  $V = W = V \cap W = V + W = \text{retta } y=x$

③ Come vedo che  $\dim(V+W) = 2$ ?

1° modo: Grassmann

2° modo:  $V+W$  = somma di un p.to della retta + un p.to qualunque del piano = ottengo tutto il piano

3° modo:  $V+W = \text{Span}((1,2), (3,4), (5,6))$

(posso eliminare chiunque e gli altri due restano lin. indep.)  
 $\dim V \quad \dim V \quad \dim(V \cap W) \quad \dim(V+W)$

|                |                                      |                                      |   |   |   |   |   |
|----------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}^3$ | $(1,2,3)$                            | $(1,1,0)$<br>$(0,2,-1)$              | 1 | 2 | 0 | 3 | ① |
| $\mathbb{R}^3$ | $(1,1,0)$<br>$(1,0,1)$               | $(0,1,1)$<br>$(1,1,1)$               | 2 | 2 | 1 | 3 | ② |
| $\mathbb{R}^3$ | $(1,1,0)$<br>$(1,0,1)$               | $(0,1,-1)$<br>$(3,1,2)$              | 2 | 2 |   |   |   |
| $\mathbb{R}^3$ | $(-1,1,1)$<br>$(2,1,0)$<br>$(1,2,1)$ | $(1,0,1)$<br>$(0,5,0)$<br>$(7,-6,7)$ | 2 | 2 |   |   |   |

$U_3 = U_1 + U_2 \quad U_3 = 7U_1 - \frac{6}{5}U_2$

①  $V+W = \text{Span}((1,2,3), (1,1,0), (0,2,-1))$

Sospetto che siano lin. indep.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ok}$$

Geometricamente si tratta di una retta ed un piano di  $\mathbb{R}^3$  che si intersecano solo nell'origine.

②  $V+W = \text{Span}((1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1))$

Sospetto che i primi 3 siano indep.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ok} \rightsquigarrow \text{quindi } \dim(V+W) = 3$$

Come determino l'intersezione (geometricamente sono due piani che si intersecano in una retta, tutto per l'origine)?

**1° modo** (vale solo in  $\mathbb{R}^3$ )

Passo i due piani in coordinate e risolvo il sistema

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, -1, -1)$$

verifica: ha prod. scalare = 0 con i due vettori dati

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0, 1, -1)$$

verifica come prima

$$x - y - z = 0$$

$$y - z = 0$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$(2t, t, t) = t(2, 1, 1)$$

**2° modo** (Vale sempre se devo intersecare due sottospazi dati come Span)

$$\underbrace{a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1)}_{\text{generico elemento di } V} = \underbrace{c(0, 1, 1) + d(1, 1, 1)}_{\text{generico elemento di } W}$$

→ Risolvo (so già che ci sono soluzioni) e da quelle deduco l'intersezione

↑  
dipendenti da un parametro  $t$

[Controllare che venga lo stesso di sopra]

— 0 — 0 —