

Basi e sottospazi vettoriali

Defn. Sia V uno sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_n$ el. di V . Si dice

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$$

l'insieme di tutte le comb. lineari di $v_1, \dots, v_n$ al variare dei coeff., cioè

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \{c_1 v_1 + \dots + c_n v_n : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

Si verifica che lo Span è un s. spazio vettoriale

Esempi banali

① se $v \neq 0$, allora $\text{Span}(v) =$ tutti i multipli di v

= la retta che passa per l'origine e va in direzione v .

② se v e w sono due vettori lin. indep. (non sono l'uno multiplo dell'altro), allora

$$\text{Span}(v, w) = \text{insieme dei vettori del tipo } tv + sw$$

= piano che passa per l'origine e contiene v e w

③ se v e w sono lin. DIPENDENTI, allora

$$\text{Span}(v, w) = \text{retta che contiene } v, w \text{ e l'origine}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Span}(v) \\ &= \text{Span}(w) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &= \text{Span}(v) \\ &= \text{Span}(w) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{se entrambi} \\ \text{sono } \neq 0 \end{array}$$

Lemma di eliminazione Se v_{m+1} è comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$, allora

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}) = \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

in poche parole "posso eliminare v_{m+1} "

Esempi di sottospazi (vettoriali)

① I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono di 3 tipi:

→ il solo $\{0\}$

→ tutte le rette che passano per l'origine

→ tutto $\mathbb{R}^2$

Dim = 0 una base
 Dim = 1 Span (v)
 Dim = 2

② I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono di 4 tipi:

→ Solo $\{0\}$

Dim 0

→ rette per l'origine

Dim 1

Span (v)

→ piani per l'origine

Dim 2

Span (v, w)

→ tutto $\mathbb{R}^3$

Dim 3

due qualunque vettori
 del piano LIN. INDIP.

	Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
①	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (3, 4)$ $v_2 = (5, 6)$	SI	2	/
②	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (2, 3)$	SI	1	/
③	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1, -1)$ $v_2 = (0, \pi)$ $v_3 = (0, 0)$	NO	2	v_3
④	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1, -1)$ $v_2 = (2, 3)$ $v_3 = (-3, 3)$	NO	2	v_3 v_1
⑤	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1, -1)$ $v_2 = (2, 3)$ $v_3 = (-3, \pi)$	NO	2	v_1 v_2 v_3

← questi sono LIN. INDIP.
 sono 2, quindi sono una
 base di $\mathbb{R}^2$
 lo span è la retta
 $3x = 2y$

← Mi aspetto che se scrivo
 $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, allora
 a, b, c sono $\neq 0$

3-4-5 Se ho 3 vettori in $\mathbb{R}^2$, per forza sono LIN. DIP.

(In generale: se uno spazio V ha dim. d , e ho $m > d$ vettori in V , allora per forza sono LIN. DIP.)

③ $(0, 0) = 0 \cdot (1, -1) + 0 \cdot (0, \pi)$

Span $(v_1, v_2, v_3) =$ Span (v_1, v_2)

↑
 lemma di elim.

↑ ha dim. 2 perché v_1 e v_2
 sono lin. indip.

Posso eliminare solo v_3 perché se elimino v_1 o v_2 resta un
 solo vettore non nullo

$$\textcircled{4} \quad \begin{aligned} v_1 &= (1, -1) \\ v_2 &= (2, 3) \\ v_3 &= (-3, 3) \end{aligned} \quad \begin{aligned} v_3 &= 0 \cdot v_2 + (-3)v_1 \\ v_1 &= 0 \cdot v_2 + \left(-\frac{1}{3}\right)v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Span}(v_1, v_2, v_3) &= \text{Span}(\underbrace{v_1, v_2}_{\text{lin. indep.}}) \\ &= \text{Span}(v_2, v_3) \end{aligned}$$

Oss. Quando ho una relazione di D.P. LIN., posso ricavare tutti i vettori che hanno un coeff. $\neq 0$ in funzione degli altri

	$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 1, 1)$	SI	1	/
	$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (0, 1, 1)$ $v_2 = (2, -1, 3)$	SI	2	/
	$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (-4, 2, 6)$ $v_2 = (2, -1, 3)$	SI	2	/
$\textcircled{3}$	$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 0, 2)$ $v_2 = (2, 0, 1)$ $v_3 = (1, 1, 1)$	SI	3	/
$\textcircled{4}$	$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 0, 2)$ $v_2 = (2, -1, 1)$ $v_3 = (-1, 1, 1)$	NO $v_3 = v_1 - v_2$	2	v_1 v_2 v_3
$\textcircled{5}$	$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (0, 1, 1)$ $v_2 = (2, -1, 3)$ $v_3 = (-2, 2, -2)$ $v_4 = (1, 2, 0)$	NO	3	v_1 v_2 v_3

$\textcircled{4}$ Perché posso eliminare chi voglio?

1° modo : chiunque elimino, vedo a occhio che gli altri 2 sono lin. indep. (non multipli l'uno dell'altro)

2° modo : $v_1 - v_2 - v_3 = 0$

Tutti i coeff. sono $\neq 0$, quindi posso ricavare ognuno in funzione degli altri e quindi eliminarlo

$\textcircled{3}$ Sospetto siano lin. indep.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{-3} & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{lin. indep.}$$

⑤ Uno deve provare a risolvere $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$ e vedere che succede

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a - b + 2c + 2d &= 0 \\ 2b - 2c + d &= 0 \\ -4d &= 0 \end{aligned}$$

$$d=0, \quad c=t, \quad b=t, \quad a = b - 2c - 2d = -t$$

$$(a, b, c, d) = (-t, t, t, 0)$$

ad esempio $-1, 1, 1, 0$

Cosa vuol dire? Che $-v_1 + v_2 + v_3 = 0$

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$