

→ VETTORI LIN. INDIP.

→ GENERATORI

→ BASI

→ COMPONENTI

Def. Sia V sp. vett. e siano $u_1, \dots, u_m$ elementi di V .

Si dice che

- sono lin. indip. se

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$$

↳ lo è ovvia

(cioè una loro comb. lineare è il vettore nullo se e solo se tutti i coeff. sono nulli)

- sono generatori se ogni $v \in V$ si scrive come

$$v = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m \rightarrow (c_1, \dots, c_m \text{ si dicono le componenti di } v \text{ e sono uniche})$$

per opportuni $c_1, \dots, c_m$ in $\mathbb{R}$

- sono una base se sono lin. indip. + generatori

Esempio 1 $V =$ matrici 2×2

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$v = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑
sono una base dello spazio V

Perché sono una base?

→ sono generatori per quanto scritto sopra

→ sono lin. indip. perché la somma di sopra viene 0 (cioè la matrice nulla) se e solo se i coeff. sono tutti nulli.

Dimensione spazio = numero elementi di una base = 4

(V è descritto da 4 parametri)

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

UNA base di questo spazio è $1, x, x^2, x^3$. Infatti ogni $p(x) \in V$ si scrive come

$$p(x) = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$$

Le due verifiche sono come sopra.

Quindi $\dim V = 4$.

Esempio 3 $V = \mathbb{R}^2$

$$v_1 = (1, 2) \quad v_2 = (3, 4)$$

Questi sono una base di $\mathbb{R}^2$

base CANONICA

[Ci sarebbe una base più bella, cioè $(1, 0)$ e $(0, 1)$ poiché
 $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$]

Come verifico che è una base?

LINEARE INDIPENDENZA : impongo $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ e spero di dedurre che $c_1 = c_2 = 0$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 (1, 2) + c_2 (3, 4) = (c_1 + 3c_2, 2c_1 + 4c_2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{matrix} \quad \leadsto \quad c_2 = 0 \quad \leadsto \quad c_1 = 0 \quad \ddot{\smile}$$

ESSERE GENERATORI : impongo $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \underline{(A, B)}$
e spero di riuscire a trovare c_1 e c_2 in funzione $\underbrace{\text{generico elem. di}}_V$
di A e B . Con lo stesso conto di prima

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = A \\ 2c_1 + 4c_2 = B \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + 3c_2 = A \\ 6c_2 = 2A - B \end{cases} \quad \leadsto \quad \begin{matrix} \text{trovo } c_1 \\ \text{trovo } c_2 \end{matrix}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & A \\ 0 & 6 & 2A - B \end{array} \right)$$

Oss. Il sistema nei 2 casi è lo stesso per la parte con le incognite. Cambia solo la colonna dei termini noti.
Se lavorando alla Gauss arrivo ad una matrice a scala con tutti i PIVOT scalati come si deve, allora entrambe le verifiche hanno esito positivo

Esempio 4

$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (3, 1)$ $e_2 = (5, 2)$	$(0, -1)$	$(2, -1)$
----------------	----------------------------------	-----------	-----------

Verificare che (e_1, e_2) è una base

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

"Li metto a colonna e lavoro alla Gauss"

Trovo le componenti di $(2, -1)$

Impongo $a(3, 1) + b(5, 2) = (2, -1)$

$$(3a + 5b, a + 2b) = (2, -1)$$

$$\begin{cases} 3a + 5b = 2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3a + 5b = 2 \\ -b = 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a = 9 \\ b = -5 \end{matrix}$$

Faccio la verifica! $9(3, 1) - 5(5, 2) = (2, -1)$ 😊

Esempio 5

$\mathbb{R}_2[x]$	$e_1 = x^2 + 1$ $e_2 = x - 2$ $e_3 = x + 3$	x	$x^2 - 3x + 2$
-------------------	---	-----	----------------

Verificare che sono una base

• LINEARE INDIPENDENZA $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$

$$a(x^2 + 1) + b(x - 2) + c(x + 3) = 0$$

$$ax^2 + (b + c)x + (a - 2b + 3c) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ a-2b+3c = 0 \end{cases} \xrightarrow{3^a - 1^a} \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ -2b+3c = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ 5c = 0 \end{cases}$$

$$c=0 \rightsquigarrow b=0 \rightsquigarrow a=0 \quad \ddot{\smile}$$

• ESSERE GENERATORI. Impongo

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = A + Bx + Cx^2$$

e spero di trovare a, b, c in funzione di A, B, C .

Con lo stesso conto di prima arrivo a

$$ax^2 + (b+c)x + (a-2b+3c) = A + Bx + Cx^2$$

da cui

$$\begin{cases} a = C \\ b+c = B \\ a-2b+3c = A \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Conetti dopo} \\ \text{video} \end{array} \quad \text{che si risolve come prima}$$

Tutto dipende dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

che lavorata alla
Gauss diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Oss. Pensare ai polinomi $e_1 = x^2+1$, $e_2 = x-2$, $e_3 = x-3$ nello spazio $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ è la stessa cosa che pensare ai vettori

$$(1, 0, 1), (0, 1, -2), (0, 1, -3) \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

Oss. Dalla teoria sappiamo che se abbiamo n vettori in uno sp. vett. V di dimensione n (per questo basta trovare una base "bella") allora vale questo fatto

sono una base $\Leftrightarrow$ sono lin. indip.

$\Leftrightarrow$ sono generatori

(cioè basta fare una sola delle 2 verifiche).

— o — o —