

SPAZI VETTORIALI Per le definizioni, vedi lezioni 2021/22

Moralmente: è un insieme di "VETTORI" sul quale possiamo fare due operazioni

→ VETTORE + VETTORE = VETTORE

(commutativa, associativa, esistenza 0, esistenza $-\vec{v}$)

→ NUMERO · VETTORE = VETTORE

($1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ + distributive e associative)

Esercizio classico Dimostrare che il vettore $\vec{0}$ è unico.

Supponiamo che ce ne siano due, cioè $\vec{0}_1$ e $\vec{0}_2$. Questo vuol dire che

$$\vec{v} + \vec{0}_1 = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$$

$$\vec{v} + \vec{0}_2 = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$$

Ma allora

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{0}_1 & = & \vec{0}_1 + \vec{0}_2 & = & \vec{0}_2 + \vec{0}_1 & = & \vec{0}_2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{prop. di } \vec{0}_2 & & \text{comm.} & & \text{prop. di } \vec{0}_1 & & \\ \text{con } \vec{v} = \vec{0}_1 & & & & \text{con } \vec{v} = \vec{0}_2 & & \end{array}$$

Esempi classici di spazio vettoriale

1 $\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n)$ n -uple di numeri reali

Basta osservare che li sappiamo sommare e moltiplicare per un numero.

[2] $\mathbb{R}$

Basta osservare che possiamo sommarli e moltiplicarli per un numero (posso anche dividere, ma non ci interessa)

[3] Matrici $n \times m$, con n ed m fissi

Le posso sommare e moltiplicare per un numero

(se $n=m$ le posso anche moltiplicare, ma non ci interessa)

Oss. Non c'è una grossa differenza tra le matrici 7×3 e $\mathbb{R}^{21}$
(è semplicemente un modo diverso di scrivere 21 numeri)
(la differenza si vede quando considero altre operazioni)

[4] $\mathbb{R}[x]$ = polinomi nella variabile x a coeff. reali

Consideriamo solo la somma di polinomi ed il prodotto di un polinomio per un numero

(non ci interessa che i polinomi possiamo moltiplicarli tra di loro o fare la composizione)

[5] $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ = polinomi come sopra con grado ≤ 3 ($0 \leq 2022$)

(se sommo due polin. di grado ≤ 3 ottengo ancora un polin. di grado ≤ 3 . Idem se moltiplico per un numero)

Un polinomio di grado ≤ 3 si presenta nella forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad \text{con } a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$$

possiamo associare al polinomio il "vettore"

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$$

5bis $\mathbb{R}_{\geq 3}[x] = \text{pol. di grado } \geq 3$ NON sono uno spazio vettoriale

La somma non è ben definita:

$$p_1(x) = x^2 + x^3$$

$$p_2(x) = x - x^3$$

MA $p_1(x) + p_2(x) = x^2 + x$ NON HA GRADO ≥ 3 .

6 Funzioni $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sono uno sp. vett.

Basta osservare che posso sommarle o moltiplicarle per un numero (posso anche moltiplicarle fra di loro, ma qui non è rilevante)

7 $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(2022) = 0 \}$
È uno sp. vettoriale?

→ Somma: prendo $p_1(x) \in V$ cioè con $p_1(2022) = 0$

" $p_2(x) \in V$ " " $p_2(2022) = 0$

La loro somma $p_1(x) + p_2(x)$ ha la stessa proprietà?

$$\text{SI: } (p_1 + p_2)(2022) = p_1(2022) + p_2(2022) = 0 + 0 = 0$$

→ Prodotto: stessa cosa: se $p(2022) = 0$, allora

$$c p(2022) = c \cdot 0 = 0$$

Quindi risposta affermativa!

7bis $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(7) = 12 \}$ sono uno sp. vett.?

No! Se $p_1(7) = 12$ e $p_2(7) = 12$, allora $(p_1 + p_2)(7) = 24$, quindi V non è chiuso rispetto alla somma.

8 $V = \{ \text{funzioni } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ del tipo } f(x) = a \cos x + b \sin x \}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 numeri reali

È uno spazio vettoriale? SÌ!

→ Somma: prendo

$$f_1(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

$$f_2(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x$$

Faccio la somma

$$f_1(x) + f_2(x) = (a_1 + a_2) \cos x + (b_1 + b_2) \sin x$$

che è ancora dello stesso tipo

→ Prodotto: prendo

$$f(x) = a \cos x + b \sin x$$

prendo un numero $\lambda \in \mathbb{R}$

Faccio il prodotto

$$\lambda f(x) = \lambda(a \cos x + b \sin x) = (\lambda a) \cos x + (\lambda b) \sin x$$

è ancora dello stesso tipo.

Oss. Alla fine lo spazio V sopra si può identificare con $\mathbb{R}^2$

$$a \cos x + b \sin x \rightsquigarrow (a, b)$$

limitandosi a fare le operazioni sui coeff.

9 $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \text{ tali che } p(3) = 0 \}$

Si verifica facilmente che sono uno spazio vettoriale.

Lo posso identificare con un certo $\mathbb{R}^n$?

SÌ, grazie al solito teorema di RUFFINI, che dice che se

$$p(3) = 0, \text{ allora } p(x) = (x-3) q(x)$$

$\uparrow$ grado ≤ 1

cioè $p(x) = (x-3)(a+bx)$

$$p(x) \rightsquigarrow (a,b)$$

e questa rispetta le operazioni, ad esempio

$$p_1(x) = (x-3)(a_1+b_1x)$$

$$p_2(x) = (x-3)(a_2+b_2x)$$

allora $(p_1+p_2)(x) = (x-3)[(a_1+a_2) + (b_1+b_2)x]$

— o — o —