

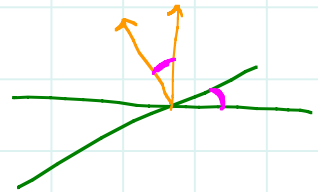
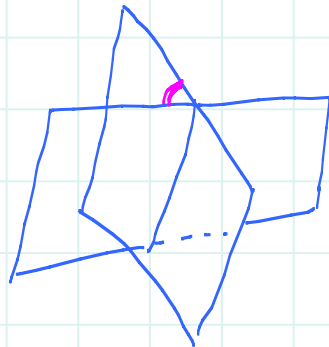
Due piani nello spazio possono essere

- incidenti (si intersecano in una retta formando un certo angolo)
- paralleli e distinti (non si intersecano)
- coincidenti

Come decido? Metto a sistema le eq. cartesiane

Angolo tra 2 piani: per definirlo prendo un piano $\perp$ alla retta intersezione.

I due piani dati intersecano questo 3° piano lungo due rette. L'angolo tra le 2 rette è quello che cerco.



Operativamente: angolo tra 2 piani = angolo tra i vettori $\perp$ ai piani
 = (a, b, c) della cartesiana

Esempi

$x + y - 2z = 4$	$x + y - 2z = 5$		
$(1, 1, -1) + t(-2, 1, 0) + s(-3, 0, 1)$	$x + 2y + 3z = 0$		
$(-3, 0, 1) + t(0, -3, 2) + s(2, 2, -2)$	$x + 2y + 3z = 0$		

← Paralleli e distinti

← Coincidenti

← Coincidenti

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 2, 3) \rightarrow x + 2y + 3z = 0$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (2, +4, 6) \rightarrow 2x + 4y + 6z = 0$$

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+2y-3z=4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y-z &= 5 \\ y-2z &= -1 \end{aligned}$$

$$z=t, \quad y=2t-1, \quad x=5-y+z=5-2t+1+t=6-t$$

$$(x,y,z) = (6-t, 2t-1, t) = (6, -1, 0) + t(-1, 2, 1)$$

parametrica della retta
intersezione

Angolo tra i 2 piani

$$\cos \theta = \frac{\langle (1,1,-1), (1,2,-3) \rangle}{\| \cdot \| \cdot \| \cdot \|} = \frac{1+2+3}{\sqrt{3} \sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

Una retta e un piano possono essere

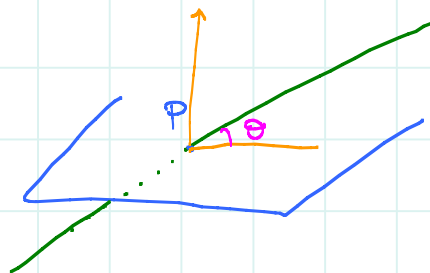
→ incidenti (calcolare p.to intersezione e angolo)

→ paralleli

→ retta contenuta nel piano

Se θ è l'angolo tra retta e piano,
allora

$90^\circ - \theta$ = angolo tra (a,b,c) del piano e direzione retta



	A	B	C	D	E			
1	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,0)	(0,1,1)			
2	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(2,2,2)	(1,1,1)			
3	(1,0,2)	(-1,1,5)	(0,2,5)	(2,0,1)	(0,-3,0)			
4	(2,0,1)	(0,0,3)	(4,0,1)	(1,1,5)	(0,1,6)			

① Eq. cartesiane del piano: $x+y+z=1$ (verifica diretta)

$$\text{Eq. param. retta} \quad \begin{aligned} (1,1,0) + t(-1,0,1) &= (1-t, 1, t) \\ D + t(E-D) \end{aligned}$$

Sostituisco: $1-t+1+t=1 \rightsquigarrow 2=1 \rightsquigarrow$ nessuna soluzione.
 $\rightsquigarrow$ retta $\parallel$ piano

② $x+y+z=1$

$(2,2,2)+t(1,1,1)=(2+t,2+t,2+t)$

$2+t+2+t+2+t=1 \rightsquigarrow 3t=-5 \rightsquigarrow t=-\frac{5}{3} \rightsquigarrow$ sostituisco nella param.

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Nota: la retta potevo scriverla anche come (t,t,t)

3

(1,0,2)	(-1,1,5)	(0,2,5)	(2,0,1)	(0,-3,0)			
(2,0,1)	(0,0,3)	(4,0,1)	(1,1,5)	(0,1,6)			

$A+t(B-A)+s(C-A)=(1,0,2)+t(-2,1,3)+s(-1,2,3)$

$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-3, 3, -3) \quad x-y+z=3$

VERIFICA

Parametrica retta: $(2,0,1)+t(+2,+3,+1)=(2+2t,3t,1+t)$

$2+2t-3t+1+t=3 \rightsquigarrow 3=3 \rightsquigarrow$ la retta è contenuta nel piano.

A	B	C		
(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)		
(-1,-2,3)	(1,3,0)	(0,0,0)		
(0,0,0)	(2,-4,6)	(-1,2,-3)		

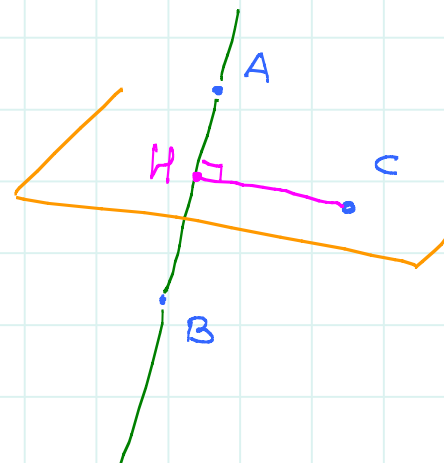
Calcolare il piano che passa per C ed è $\perp$ alla retta AB

Retta AB: $(1,0,0)+t(-1,1,0)=(1-t,t,0)$

Cerco il piano per C e $\perp$ alla retta

(a,b,c) del piano
= direzione della retta

$-x+y=0$ oppure $x-y=0$



Intersecando retta AB con questo piano ottengo

$$1-t-t=0 \quad 2t=1 \quad t=\frac{1}{2}$$

$\leadsto (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = H \leftarrow$ è il punto della retta AB più vicino a C!!

Quindi HC è la distanza tra il p.to C e la retta AB.

Approccio alternativo: il generico p.to della retta AB è

$$P = (1-t, t, 0)$$

La distanza di P da C, fatta al quadrato, è

$$PC^2 = \|(1-t, t, 0) - (0, 0, 1)\|^2$$

$$= \|(1-t, t, -1)\|^2 = (1-t)^2 + t^2 + 1 = 1 - 2t + t^2 + t^2 + 1 \\ = 2t^2 - 2t + 2$$

Quando è minimo? $4t - 2 = 0 \leadsto t = \frac{1}{2}$