

Rette nello spazio

$$\underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\text{p.to di partenza}} + t \underbrace{(a, b, c)}_{\text{direzione}}$$

Piani nello spazio

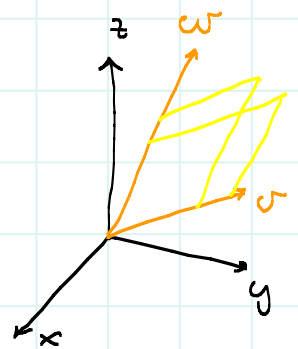
Forma cartesiana : $ax + by + cz = 0$ ← piano passa per l'origine
 $ax + by + cz + d = 0$ ← piano in generale
 $\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle$
 $\uparrow$
 vettore $\perp$ al piano

Forma parametrica : → se passa per l'origine

$$t\vec{u} + s\vec{w}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 vettori dati che
 non sono uno
 multiplo dell'altro

è il piano che passa per l'origine e contiene
 le due rette date dai multipli di $\vec{u}$ e $\vec{w}$.



→ se non passa per l'origine : $P_0 + t\vec{u} + s\vec{w}$
 $\uparrow$
 "p.to base"

Distanza p.to da un piano : $P = (x_0, y_0, z_0)$

$$\text{piano : } ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{distanza : } \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(esattamente lo stesso conto che si faceva nel piano).

Parametrica	Cartesiana	Dist. da O
$(1, -1, 2) + t(3, 0, 1) + s(1, 2, 0)$		
$(t - s, 2t - 3s, 1 - t - 2s)$		
$(1, -1, 1) + t(2, 0, 2) + s(0, 1, 0)$		
$(1, -1, 3) + t(1, 1, 0) + s(0, 2, 0)$		
$(1 + t - 2s, 1 + 2t + 3s, -2 + t - 2s)$		

①

Conosco un piano in parametrica e voglio passare in cartesiana

1°: metodo bonvino

$$(1, -1, 2) + t(3, 0, 1) + s(1, 2, 0) = (1 + 3t + s, -1 + 2s, 2 + t)$$

$\begin{matrix} x & & y & & z \end{matrix}$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{sostituisco}$$

$$a + 3at + as - b + 2bs + 2c + ct + d = 0$$

$$(3a + c)t + (a + 2b)s + (a - b + 2c + d) = 0$$

Impongo che i 3 coeff. si annullino

$$3a + c = 0$$

$$a + 2b = 0$$

$$a - b + 2c + d = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$$3a + c = 0$$

$$6b - c = 0$$

$$9c + 6d = 0$$



$$d = t \quad c = -\frac{2}{3}d = -\frac{2}{3}t$$

$$b = \frac{c}{6} = \frac{1}{6} \left(-\frac{2}{3}t \right) = -\frac{1}{9}t$$

$$a = -\frac{c}{3} = \frac{2}{9}t$$

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{2}{9}t, -\frac{1}{9}t, -\frac{2}{3}t, t \right) \quad \text{scelgo } t = 9$$

$$(2, -1, -6, 9) \rightsquigarrow 2x - y - 6z + 9 = 0$$

2° modo Uso la formula MISTERIOSA

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (u_2 w_3 - u_3 w_2, u_3 w_1 - u_1 w_3, u_1 w_2 - u_2 w_1)$$

VETTORE CHE È PERPENDICOLARE
A I DUE VETTORI DATI !!

Come puoi scoprirlo: risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} u_1 x + u_2 y + u_3 z &= 0 \\ w_1 x + w_2 y + w_3 z &= 0 \end{aligned}$$

Per trovare (a, b, c) del piano, basta usare la formula con i due vettori che sono moltiplicati per t ed s . Nell'esempio

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2, 1, 6) \rightsquigarrow -2x + y + 6z = d$$

↑
impongo il
passaggio per
 $(1, -1, 2)$
 $\rightsquigarrow d = 9$

L'equazione è $-2x + y + 6z = 9$

Parametrica	Cartesiana	Dist. da O
$(1, -1, 2) + t(3, 0, 1) + s(1, 2, 0)$		
$(t - s, 2t - 3s, 1 - t - 2s)$		
$(1, -1, 1) + t(2, 0, 2) + s(0, 1, 0)$		
$(1, -1, 3) + t(1, 1, 0) + s(0, 2, 0)$		
$(1 + t - 2s, 1 + 2t + 3s, -2 + t - 2s)$		

↑ ↑

$$(1, 1, -2) + t(1, 2, 1) + s(-2, 3, -2)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-7, 0, 7)$$

$$\begin{aligned} -7x + 7z &= d \\ -7x + 7z &= -21 \\ -x + z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

VERIFICO A MENTE SOSTITUENDO x, y, z (dove viene $0=0$).