

Sono dati una retta r (in vari modi) ed un punto (x_0, y_0) . Si chiede di determinare l'equazione della parallela e della perpendicolare ad r passanti per (x_0, y_0) , e della perpendicolare ad r passante per l'origine. Fornire la risposta nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

Retta r	(x_0, y_0)	Parallela	Perpendicolare	Perpend. origine	
$y = 2x$	$(1, 1)$	$y = 2x - 1$	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$y = -\frac{1}{2}x$	1
$2x + y = 3$	$(1, 1)$	$y = -2x + 3$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}x$	2
$x = -7$	$(2, 3)$	$x = 2$	$y = 3$	$y = 0$	3
$4 - y = 0$	$(-3, 2)$	$y = 2$	$x = -3$	$x = 0$	4
$(2, 3) + t(-1, -1)$	$(5, 5)$	$y = x$	$y = -x + 10$	$y = -x$	5
$(3 + t, 2t + 5)$	$(-2, 1)$				6
$(1, 1) - t(2, 0)$	$(3, -4)$	$y = -4$	$x = 3$	$x = 0$	7
$(t, t + 1)$	$(-1, 0)$	$y = x + 1$	$y = -x - 1$	$y = -x$	8

$y = 1 \leftarrow$

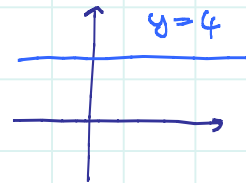
$y = x + 1 \leftarrow$

② $y = -2x + 3$

③



④



⑤ $(2, 3) + t(-1, -1)$

1° modo $\leadsto$ passo in contemporanea

⑥ ...

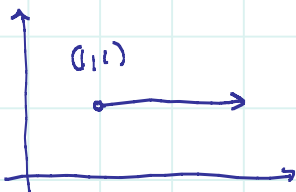
2° modo $\leadsto (5, 5) + t(-1, -1)$

$(5, 5) + t(1, 1)$

⑦ $(1, 1) - t(2, 0) \leadsto y = 1$

↑
direzione
asse x

$(1 - 2t, 1)$
x y



Fatto geometrico

$ax + by = 0$

$\langle (a, b), (x, y) \rangle = 0$

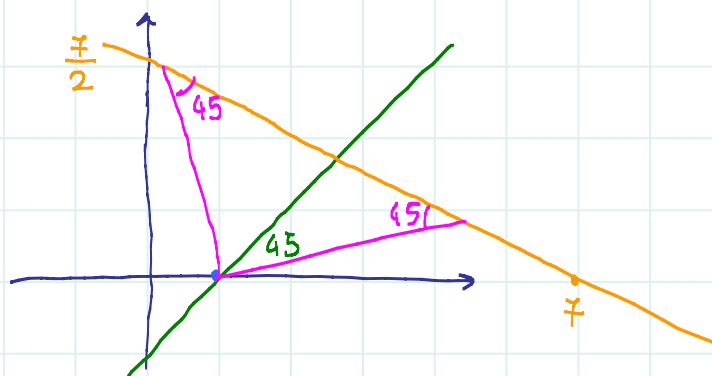
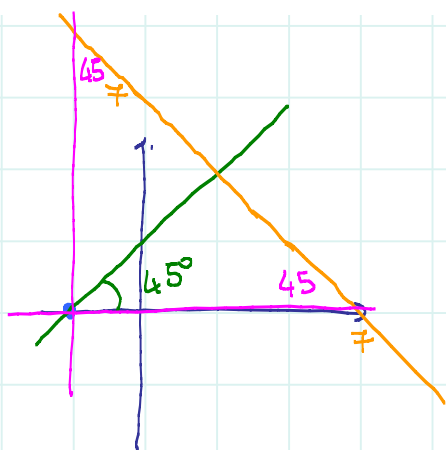
(a, b) è un vettore perp. alla retta

$ax + by + c = 0$, quindi (a, b) è un vettore $\perp$ alla retta, che ora però non passa per l'origine se $c \neq 0$.

Si chiede di determinare la retta r_1 passante per (x_0, y_0) che forma un angolo θ con il semiasse positivo delle x , e le rette r_2 ed r_3 che passano per (x_0, y_0) e formano un angolo θ con la retta data r . Fornire le risposte nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

(x_0, y_0)	θ	Retta r	Retta r_1	Rette r_2 ed r_3
$(-1, 0)$	45°	$x + y = 7$	$y = x + 1$	$x = 1$ $y = 0$
$(1, 0)$	45°	$x + 2y = 7$	$y = x - 1$	
$(2, 3)$	$-\pi/3$	$x = 4$		
$(2, 3)$	$\pi/3$	$2x + y = 3$		
$(2, -1)$	30°	$(1, 1) + t(3, 4)$		
$(0, 0)$	$-\pi/4$	$(-t, 3t)$		
$(0, 1)$	$\arccos(1/3)$	$3x + y = 1$		
$(5, 3)$	$\arctan(1/2)$	$(2t + 1, -t + 4)$		
$(3, -1)$	$\arccos(-1/3)$	$(2t - 1, t)$		

①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨



② Le due rette che sto cercando saranno del tipo $(1, 0) + t(a, b)$
La retta data è $(7, 0) + t(2, -1)$

Devo imporre

$$\cos \theta = \frac{\langle (a, b), (2, -1) \rangle}{\| (a, b) \| \cdot \| (2, -1) \|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{2a - b}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2(2a - b)^2 = 5(a^2 + b^2)$$

$$8a^2 - 8ab + 2b^2 = 5a^2 + 5b^2 \quad \leadsto \quad 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0$$

Divido per b^2 (dopo aver osservato che $b=0$ non è soluzione)

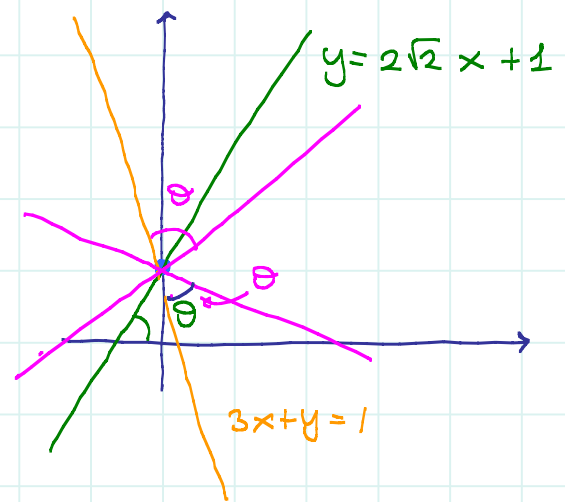
$$3 \frac{a^2}{b^2} - 8 \frac{a}{b} - 3 = 0 \quad 3t^2 - 8t - 3 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{3}{-1/3}$$

Morale $\frac{a}{b} = 3$ $(a, b) = (3, 1)$ $(1, 0) + t(3, 1) \leadsto$ congesiana
 $\frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$ $(a, b) = (1, -3)$ $(1, 0) + t(1, -3)$

⑦ Punto : $(0,1)$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \rightsquigarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$3x + y = 1$$



Ora coeff. angolare = $\tan\theta$

Se conosco $\cos\theta$, come trovo $\tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{\frac{8}{9}}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 3 = 2\sqrt{2}$$

Come sono fatte r_2 ed r_3 ? Sono del tipo $(0,1) + t(a,b)$
mentre quella data è $(0,1) + t(-1,3)$

Basta imporre

$$\frac{\langle (a,b), (-1,3) \rangle}{\|(a,b)\| \cdot \|(-1,3)\|} = \cos\theta = \pm \frac{1}{3}$$

$$\frac{-a+3b}{\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{10}} = \pm \frac{1}{3}$$

$$9(a-3b)^2 = 10(a^2+b^2)$$

$$9a^2 - 54ab + 81b^2 = 10a^2 + 10b^2$$

$\rightsquigarrow$ divido per b^2 e risolvo.

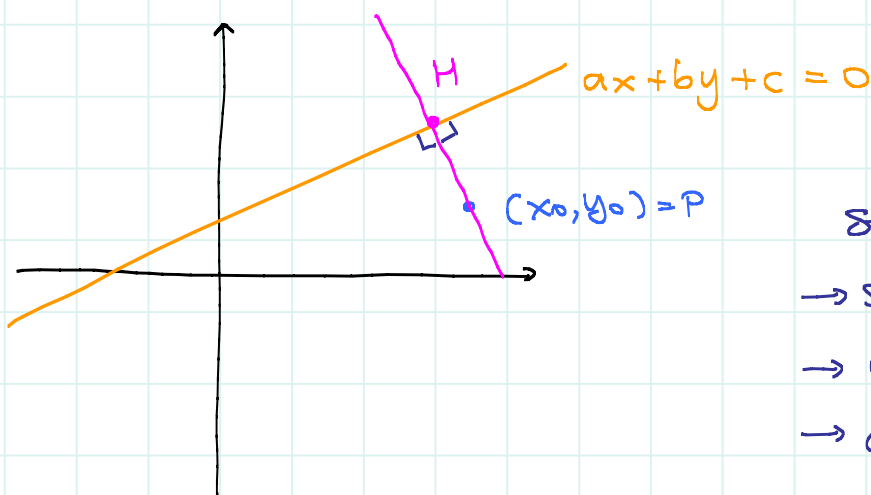
— 0 — 0 —

Distanza p.to - retta

Retta $ax + by + c = 0$

P.to (x_0, y_0)

Voglio trovare la distanza del punto dalla retta.



Strategia:

- $\rightarrow$ scrivo la $\perp$ ad r passante per P
- $\rightarrow$ interseco con la retta data $\rightsquigarrow H$
- $\rightarrow$ calcolo la distanza PH

→ Perpendicolare : $(x_0, y_0) + t(a, b) = (x_0 + at, y_0 + bt)$

→ intersezione: $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$

$$(a^2 + b^2)t + ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$\leadsto t = - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} = t_0$$

$$H = (x_0 + at_0, y_0 + bt_0)$$

→ distanza $PH = \|H - P\| = \|(at_0, bt_0)\|$

$$= |t_0| \cdot \|(a, b)\| = |t_0| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Conclusion

$$\text{distanza} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

— o — o —