

SISTEMI LINEARI

Tre possibilità tra cui decidere

- soluzione unica (non trovarla)
- nessuna soluzione
- infinite soluzioni che dipendono da un po' di parametri (non trovare "espressione generale" che le descrive)

Metodi :

- Algoritmo di GAUSS (o GAUSS-JORDAN)
- matrici a scala
- PIVOT

Operazioni consentite :

- ① Scambiare tra di loro due righe
- ② Sostituire una riga R_i con la riga $aR_i + R_j$ ($i \neq j$) con

[2.1] GENERALE : $a \neq 0$

[2.2] ULTRA-ORTODOSSA : $a = 1$

Idea centrale: se prendo un sistema, e faccio una delle 2 op., ottengo un nuovo sistema che ha le stesse soluzioni di quello iniziale.
Quindi si procede fino a quando si ottiene un sistema con matrice a scala, che si sa risolvere.

Esempio 1

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 2x = y - 3 \\ 2y = 6 + 4x \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ 2R_2 - R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 9 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 7y = 9 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow y = \frac{9}{7} \rightsquigarrow 2x = 3y + 5 = \frac{27}{7} + 5 = \frac{62}{7} \rightsquigarrow x = \frac{31}{7}$$

$$\textcircled{2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ R_2 + 2R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 0 = 20 \end{cases}$$

NO SOLUTION!

$$\textcircled{3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ R_2 + 2R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

A questo posso scegliere y come mi pare e trovare x di conseguenza:

$$y = t \rightsquigarrow 2x = 3y + 5 = 3t + 5 \rightsquigarrow x = \frac{3}{2}t + \frac{5}{2}$$

Soluzione generale: $(x, y) = \left(\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}, t \right) = \left(\frac{5}{2}, 0 \right) + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro libero}}}{t} \left(\frac{3}{2}, 1 \right)$

$$= \left(\frac{5}{2}, 0 \right) + t (3, 2)$$
$$= \left(\frac{5}{2}, 0 \right) + t (-6, -4)$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 2x = y - 3 \\ 2y = 6 + 4x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -4x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ R_2 + 2R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
$$y = t, \quad 2x = y - 3 = t - 3$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}, t \right) = \left(-\frac{3}{2}, 0 \right) + t \left(\frac{1}{2}, 1 \right).$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y-2z=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

$$R_2 - 2R_1$$

$$R_3 - R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x+y+z=2$$

$$y-3z=0$$

$$0=0$$

$$z=t, y=3t, x=2-y-z=2-3t-t=2-4t$$

$$(x, y, z) = (2-4t, 3t, t) = (2, 0, 0) + t(-4, 3, 1)$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y+2z=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

$$x+y+z=2 \rightsquigarrow x=2$$

$$y-3z=0 \rightsquigarrow y=0$$

$$-4z=0 \rightsquigarrow z=0$$

SOL. UNICA

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+y+3z=5 \\ x+2y-z=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow 0=1$$



NESSUNA SOLUZIONE

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[3R_2 - R_1]{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3\lambda + 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$3x - y = 2$$

$$(3\lambda + 1)y = 1$$

ci sono 2 casi

- Se $3\lambda + 1 = 0$, cioè $\lambda = -\frac{1}{3}$, allora NO SOL
- Se $3\lambda + 1 \neq 0$, allora ricavo y e poi ricavo $x \leadsto$ soluz. unica
— 0 — 0 —

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = \lambda \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 2 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{2R_1 - 3R_2 \\ R_1 - 3R_3}]{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & \lambda \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & -7 & 2 - 3\lambda \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & -9 - 3\lambda \end{array} \right) \quad 0 = -9 - 3\lambda$$

- Se $\lambda \neq -3$, allora NO SOLUZ.
- Se $\lambda = -3$, allora soluz. unica grazie alle prime 2 righe.
— 0 —

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + \lambda z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & 2 \end{array} \right)$$

- Se $\lambda + 1 = 0$, cioè $\lambda = -1$, allora NO SOL
- Se $\lambda \neq -1$, allora SOLUZ. UNICA

— 0 — 0 —