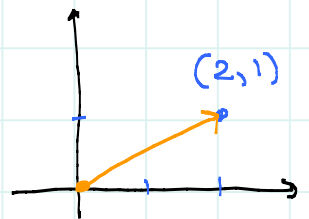


- Geometria Analitica
- Sistemi lineari
- Spazi vettoriali e applic. lin.
- Prodotti scalari

} MATRICI

Vettori $\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano (x, y) $\mathbb{R}^3$ = spazio (x, y, z) $\mathbb{R}^n$ = spazio a n coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 

Possiamo indicare un vettore con una singola lettera

$$P = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{v} = (1, 7, -3, 4) \in \mathbb{R}^4$$

Operazioni tra vettori:

→ SOMMA (componente per componente)

→ PRODOTTO PER UNO SCALARE (prodotto di un numero per un vettore)

→ PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\rightarrow \text{NORMA} : \quad \|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$\uparrow$ lunghezza del vettore $\uparrow$ PITAGORA a n variabili

$$\rightarrow \text{DISTANZA} : \quad \text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Esempi in $\mathbb{R}^2$ $\vec{v} = (2, 3)$ $\vec{w} = (1, -2)$

$$\vec{v} + \vec{w} = (3, 1)$$

$$\vec{v} - \vec{w} = (1, 5)$$

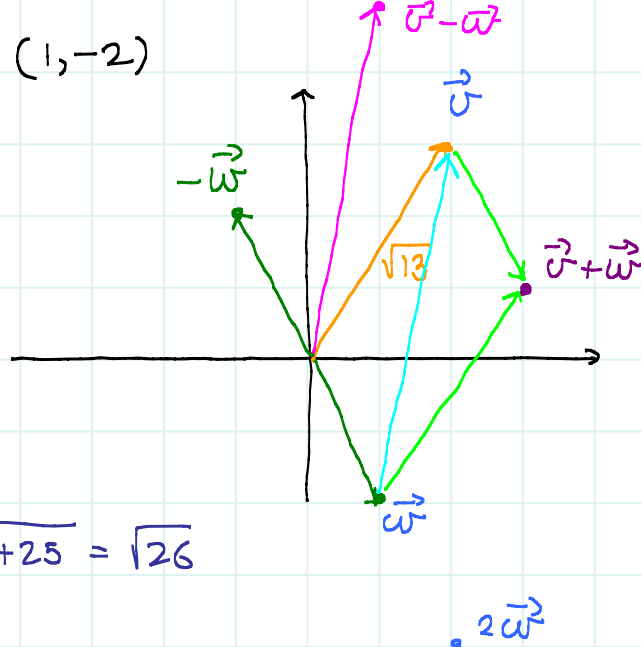
$$2\vec{w} = (2, -4)$$

$$-\vec{v} = (-2, -3)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\text{dist}(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \|(1, 5)\| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 2 - 6 = -4$$



Come vedo $\vec{v} - \vec{w}$?

1° modo: è la somma tra $\vec{v}$ e $-\vec{w}$

2° modo: è quello che devo aggiungere a $\vec{w}$ per ottenere $\vec{v}$

$$\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}$$

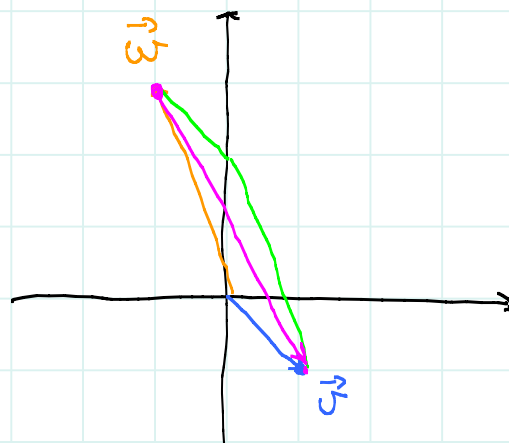
cioè possiamo pensarlo come il vettore che ha punto di applicazione in $\vec{w}$ e punta della freccia in $\vec{v}$.

$$\vec{v} = (1, -1)$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (0, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, 3)$$

$$\vec{v} - \vec{w} = (2, -4)$$



Significato geometrico del prodotto scalare

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$$

↑
angolo compreso

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

Esempi $\vec{v} = (1, -1)$ $\vec{w} = (-1, 3)$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = -4$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{-4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

($\cos \alpha < 0 \Rightarrow$ angolo tra i 2 vettori è ottuso)

Esercizio Consideriamo nello spazio i 3 punti

$$A = (1, 0, 2)$$

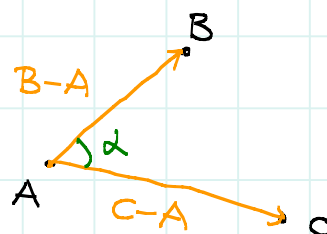
$$B = (0, -1, 1)$$

$$C = (-1, 3, 1)$$

Consideriamo il triangolo ABC.

Calcolare la lunghezza del lato BC

Calcolare il sin dell'angolo in A



$$\begin{aligned} \text{Lunghezza BC} &= \|B - C\| = \|(1, -4, 0)\| = \sqrt{1 + 16 + 0} = \sqrt{17} \\ &= \|C - B\| \end{aligned}$$

$$B - A = (-1, -1, -1) = \vec{v}$$

$$C - A = (-2, 3, -1) = \vec{w}$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{2 - 3 + 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \text{il triangolo è rettangolo in A}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = 1$$

$$\alpha = 90^\circ$$

— 0 — 0 —