

Geometria affine

Setting: $\mathbb{R}^n$ come spazio affine

Sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$: sottospazi vettoriali, eventualmente traslati

Esempi In $\mathbb{R}^2$ i sottosp. affini sono

- tutto $\mathbb{R}^2$ (dim 2)
- le rette (non nec. per l'origine) $\rightsquigarrow$ dim 1
- i punti (dim 0)

In $\mathbb{R}^3$ i s.sp. affini sono

- tutto $\mathbb{R}^3$ dim 3
- i piani dim 2
- le rette dim 1
- i punti dim 0

Descrizione di un s.sp. affine

CARTESIANA $\rightsquigarrow$ mediante equazioni

PARAMETRICA $\rightsquigarrow$ mediante Span

Esempio 1 Scrivere nei due modi il s.sp. di $\mathbb{R}^4$ che passa per i punti

$$A=(1,2,3,1) \quad B=(0,1,0,1) \quad C=(2,1,0,0) \quad D=(0,1,1,0)$$

Parametrica:

$$A + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametri liberi}}}{t} (B-A) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametri liberi}}}{s} (C-A) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametri liberi}}}{u} (D-A)$$

Per essere sicuri che abbia $\dim = 3$, guardiamo se $B-A, C-A, D-A$ sono lin. indip.

In generale una rappr. param. si presenta nella forma

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{p.to} \\ \text{dato}}}{P_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{param. liberi}}}{t_1} \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{vettori lin. indip}}}{U_1} + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{param. liberi}}}{t_k} \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{vettori lin. indip}}}{U_k}$$

sottosp. affine di $\dim k$

Cartesiana Dobbiamo trovare l'equazione

Metodo banale $ax + by + cz + dw = e$

non passa nec. per l'origine

Sostituisco a (x, y, z, w) i 4 punti dati, ottengo sistema di 4 eq. in 5 incognite. Lo risolvo e ho i coeff., a meno di un grado di libertà (che è ragionevole)

Metodo alternativo Supponiamo di aver scritto la parametrica

$$P_0 + t_1 U_1 + t_2 U_2 + t_3 U_3$$

Il vettore (a, b, c, d) dei coeff. della cartesiana deve essere $\perp$ ai vettori U_1, U_2, U_3 . Quindi lo cerco o facendo il sistema, o con la formula misteriosa in versione $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & U_1 \\ & U_2 \\ & U_3 \end{pmatrix}$$

Esempio Scrivere in $\mathbb{R}^3$ in forma cartesiana la retta che passa per i punti

$$(1, 0, 2)$$

$$(-1, 3, 4)$$

Parametrica: $(1, 0, 2) + t(-2, 3, 2)$

posso moltiplicarlo per un qualunque $\lambda \neq 0$

Cartesiana: la scrivo come intersezione di 2 piani

$$ax + by + cz = d$$

$$a + 2c = d$$

$$(1, 0, 2)$$

$$-a + 3b + 4c = d$$

$$(-1, 3, 4)$$

$$\begin{cases} a + 2c - d = 0 \\ -a + 3b + 4c - d = 0 \end{cases}$$

$$a + 2c - d = 0$$

$$3b + 6c - 2d = 0$$

↑ ↑
variabili libere

$$c=1, d=0 \leadsto b=-2, a=d-2c=-2$$

$$c=0, d=3 \leadsto b=2, a=d-2c=3$$

$$-2x - 2y + z = 0$$

$$3x + 2y = 3$$

VERIFICA OK

Nota bene: la soluzione del sistema DEVE venire la retta !!

— 0 — 0 —

Esempio In $\mathbb{R}^4$ scrivere le eq. del s.sp. affine che passa per

$$A = (1, 0, 0, 1)$$

$$B = (0, 1, 2, 3)$$

$$C = (4, 1, 0, 0)$$

Parametrica $A + t(B-A) + s(C-A)$

$B-A$ e $C-A$ lin. indep

Cartesiana

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = a_5 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4w = b_5 \end{cases}$$

→ stesso conto dell'es. prec.

TRASFORMAZIONI AFFINI

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice affine se è del tipo

$$f(x) = Ax + b$$

$\uparrow$
matrice $n \times n$

$\leftarrow$ vettore n dimensionale

Proprietà La composizione di due trasformazioni affini è una trasformazione affine.

Dim.

$$f_1(x) = A_1x + b_1$$
$$f_2(x) = A_2x + b_2$$

Allora

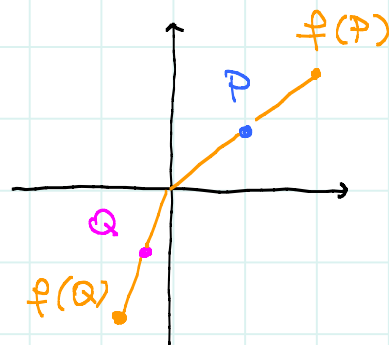
$$\begin{aligned} f_2(f_1(x)) &= A_2(f_1(x)) + b_2 \\ &= A_2(A_1x + b_1) + b_2 \\ &= \boxed{A_2A_1}x + \boxed{A_2b_1 + b_2} \end{aligned}$$

$\uparrow$
nuova matrice
(prod. delle due precedenti)

$\uparrow$ nuovo vettore b

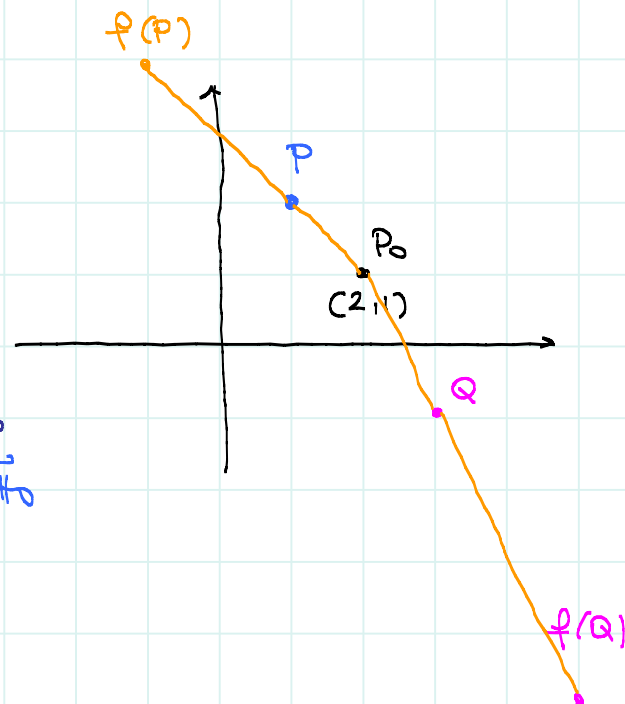
Esempio 1 OMOTETIA di fattore 2 rispetto all'origine in $\mathbb{R}^2$
 $\uparrow$ "dilatazione"

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (2x, 2y) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_b \end{aligned}$$



Esempio 2 Omotetia di fattore 3 rispetto a $(2,1)$

Come scrivo l'espressione della trasformazione?



tolgo P_0 $\downarrow$ $P \rightsquigarrow P - P_0$ $\rightsquigarrow$ $3(P - P_0)$ $\rightsquigarrow$ $3(P - P_0) + P_0$

vettore applicato in P_0 che va verso P precedente moltiplicato per 3 spostato tutto in P_0

$$P = (x, y)$$

$$(x, y) \xrightarrow{P} (x-2, y-1) \xrightarrow{P-P_0} (3x-6, 3y-3) \xrightarrow{3(P-P_0)} (3x-4, 3y-2) \xrightarrow{3(P-P_0)+P_0}$$

Conclusione: $f(x, y) = (3x-4, 3y-2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}}_b$

Verifica: il vettore $(2,1)$ deve restare fisso: ok!

Dove va a finire $(1,2)$? $f(1,2) = (-1,4)$ ☺

Oss. Anche se l'omotetia non è rispetto all'origine, la matrice è sempre quella che ci aspettiamo (λId)

↑
fattore di dilatazione

— o — o —