

Def. Un'applic. lineare $f: V \rightarrow V$ si dice simmetrica rispetto ad un prod. scalare se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$$

$$\forall v \in V \quad \forall w \in V$$

↑
prod. scalare dato

Cosa vuol dire in termini di matrici?

- Sia B la matrice che rappresenta il prod. scalare
- Sia A la matrice che rappresenta f
- Sia x il vettore delle componenti di v
- Sia y il vettore delle " " w

} rispetto ad
una stessa
base

Allora

$$\langle f(v), w \rangle = y^t B \underbrace{A x}_{\substack{\uparrow \\ \text{componenti} \\ \text{di } f(v)}}$$

$$\langle v, f(w) \rangle = (A y)^t B x = y^t A^t B x$$

I due sono uguali per ogni x e y se e solo se

$$B A = A^t B$$

Oss. Se la base è ortonormale, allora $B = Id$ e la relazione diventa la solita $A = A^t$.

Teorema B-spettrale

Versione applicazioni Sia f appl. simmetrica rispetto ad un prod. scalare **definito positivo**

Allora esiste una base **ortonormale** di V costituita da autovett. di f .
 $\uparrow$
risp. al prod. scalare
stesso

Versione matrici Sia B matrice simmetrica **definita positiva**
(moralmente: il prod. scalare)

Sia A una matrice tale che

$$BA = A^t B$$

(moralmente: l'applic. lineare simmetrica)

Allora esiste una matrice invertibile M (moralmente: il cambio di base) tale che

$$M^{-1} A M = D$$

← (diagonale con autovalori di A sulla diagonale)

$$M^t B M = \text{Identit\`a}$$

(M è una matrice ortogonale per il prod. scalare dato da B , in cui righe e colonne sono B -orto-normali)

Oss 1 Se $B = Id$ ridiventa il teorema classico

Oss 2 La matrice M nello stesso tempo

→ diagonalizza A per similitudine

→ Svedestrianizza B per congruenza

— o — o —

Esercizio 1 Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Consideriamo il prodotto scalare

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx$$

(0) Verificare che è prod. scalare $\rightarrow$ già fatto

(1) Verificare che è definito positivo

Devo dimostrare che $\langle p(x), p(x) \rangle > 0$ per ogni $p(x) \neq 0$

Vero perché

$$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_0^1 p(x)^2 dx > 0 \text{ se } p(x) \text{ non è sempre nullo}$$

(3) Scrivere la matrice che rappresenta il prod. scalare rispetto alla base $1, x, x^2$

Devo calcolare tutti i 6 possibili prod. scalari

$$\langle x^a, x^b \rangle = \int_0^1 x^{a+b} dx = \frac{1}{a+b+1}$$

Devo usare $a = 0, 1, 2$ e $b = 0, 1, 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x & x^2 \end{matrix}$$

(4) Calcolare $\langle 2x+1, x^2-3 \rangle$

1° modo Uso definizione $\int_0^1 (2x+1)(x^2-3) dx$

$$= \int_0^1 (2x^3 - 6x + x^2 - 3) dx = \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{3} - 3 = \frac{5}{6} - 6 = -\frac{31}{6}$$

2° modo Uso della matrice

$$(1 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} -3 + \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \\ -1 + \frac{1}{5} \end{pmatrix} = -3 + \frac{1}{3} -3 + \frac{1}{2} \quad \text{☺}$$

(5) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}_{\geq 2}[x]$ (poi renderla ortonormale è facile)

Metodo classico: parto dalla canonica e applico G.S

$$v_1 = 1 = e_1 = \text{polinomio 1}$$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 = x - \frac{1}{2} \cdot \overset{v_1}{1} = x - \frac{1}{2}$$

$$\langle e_2, v_1 \rangle_B = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle_B = \int_0^1 1 \, dx = 1$$

Senza frazioni possiamo usare $v_2 = 2x - 1$

Come calcolo v_3 ?

1° modo Vado avanti con G.S

$$v_3 = \underset{\uparrow}{e_3} - \frac{\langle \overset{\uparrow \frac{1}{6}}{e_3}, \underset{\uparrow \frac{1}{3}}{v_2} \rangle}{\langle \underset{\uparrow \frac{1}{3}}{v_2}, \underset{\uparrow \frac{1}{3}}{v_2} \rangle} \underset{\uparrow}{v_2} - \frac{\langle \overset{\uparrow \frac{1}{3}}{e_3}, \underset{\uparrow 1}{v_1} \rangle}{\langle \underset{\uparrow 1}{v_1}, \underset{\uparrow 1}{v_1} \rangle} \underset{\uparrow}{v_1} = x^2 - \frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Resta da calcolare

$$\langle v_3, v_2 \rangle = \int_0^1 x^2 (2x-1) dx = \int_0^1 2x^3 - x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \int_0^1 (2x-1)^2 dx = \left[\frac{(2x-1)^3}{3 \cdot 2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Quindi

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = 2x-1$$

$$v_3 = 6x^2 - 6x + 1$$

sono 3 polinomi ortogonali risp. al prodotto.

2° modo Cerco v_3 del tipo $a+bx+cx^2$
e gli impongo di essere perp. agli altri due.

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \boxed{a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0}$$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{b}{6} + \frac{c}{6} = 0}$$

[Seguo conetto dopo video]

Il polinomio $6x^2 - 6x + 1$ soddisfa 😊
— 0 — 0 —