

- Somma e intersezione di sottospazi
- Somma diretta
- Formula di GRASSMANN

Setting: sia X uno sp. vett.

Siano V e W due sottosp. vettoriali

Def. Si dice somma di V e W e' insieme

$$V + W = \{ v + w \in X : v \in V \text{ e } w \in W \}$$

Def. Ovviamente $V \cap W = \{ x \in X : x \in V \text{ e } x \in W \}$

Prop. $V \cap W$ e $V + W$ sono s.sp. vett. di X .

Dim Nel caso di $V \cap W$ è quasi ovvio.

Facciamolo nel caso della somma. Ci sono due verifiche

- La somma di 2 el. resta nello stesso insieme

$$\begin{array}{l} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{array}} \right\} \text{La loro somma è } v_1 + w_1 + v_2 + w_2$$

$$= \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in V + W$$

- Il prodotto di un elemento per un numero resta nello stesso insieme. Sia $v + w \in V + W$, sia $\alpha \in \mathbb{K} (\mathbb{R})$.

Allora

$$\alpha(v + w) = \underbrace{\alpha v}_V + \underbrace{\alpha w}_W \in V + W$$

Def. Due sottospazi V e W si dicono in somma diretta se
 $V \cap W = \{0\}$ $\leftarrow$ il solo vettore nullo

In tal caso la somma la scriviamo $V \oplus W$
 $\uparrow$ somma diretta

Prop. Siano V e W in somma diretta. Allora ogni elemento di $V \oplus W$ si scrive in MODO UNICO come $v+w$ con $v \in V$ e $w \in W$.

In questo caso v e w si chiamano COMPONENTI rispetto a V e W

Dim Supponiamo che un elemento si scriva in 2 modi
 $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$ $v_1, v_2 \in V$ $w_1, w_2 \in W$

Allora

$$\begin{array}{ccc} v_1 - v_2 & = & w_2 - w_1 \\ \in V & & \in W \end{array}$$

Ma l'unico elemento che sta in V e W è 0 , quindi

$$\begin{array}{ccc} v_1 = v_2 & \text{e} & w_1 = w_2 \\ \longleftarrow 0 & & \longleftarrow 0 \end{array}$$

FORMULA DI GRASSMANN Siano V e W due sottosp. di uno sp. vett. X .

Allora

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

Dim Poniamo $k = \dim(V \cap W)$

$$k + n = \dim V$$

$$k + m = \dim W$$

La tesi equivale a dimostrare che

$$\dim(V+W) = k + n + m \quad (\text{così avremo } 2k + n + m \text{ a sx e dx})$$

Siano $u_1, \dots, u_k$ una base di $V \cap W$

Siano $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n$ una base di V

Siano $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m$ una base di W

Dico che $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ sono una base di $V+W$. (NB: sono in numero giusto)

- Sono generatori

$$\underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{w}_{\in W} = (a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) + (c_1 u_1 + \dots + c_k u_k + d_1 w_1 + \dots + d_m w_m)$$

= comb. lin. dei $k+n+m$ vettori che volevo

- Sono lin. indep. Prendiamo una comb. lin. nulla

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n + c_1 w_1 + \dots + c_m w_m = 0$$

Porto le w a destra

$$\underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n}_{\in V} = \underbrace{-c_1 w_1 - \dots - c_m w_m}_{\in W} \quad (*)$$

Quindi entrambi stanno nell'intersezione. Ma allora

$$-c_1 w_1 - \dots - c_m w_m = \underbrace{d_1 u_1 + \dots + d_k u_k}_{\text{elem. generico dell'intersezione}}$$

Quella che ho scritto, portando tutto dalla stessa parte, diventa una comb. lin. nulla degli el. della base di W . Quindi tutti i coeff. sono nulli, in particolare $c_1 = \dots = c_m = 0$.

Ora in (*) a destra abbiamo 0, quindi a sx c'è una comb. lin. nulla degli elementi di una base di V , quindi $a_1 = \dots = a_k = 0$ e $b_1 = \dots = b_n = 0$.

Esercizio 1 Come sono fatti tutti i s.sp. vett. di $\mathbb{R}$?

Ce ne sono solo 2: $\rightarrow$ solo $\{0\}$

$\rightarrow$ tutto $\mathbb{R}$ (appena un s.sp. contiene un elemento $\neq 0$, contiene tutti i suoi multipli, quindi tutto $\mathbb{R}$)

Esercizio 2 Come sono fatti tutti i s.sp. vett. di $\mathbb{R}^2$?

Ce ne sono di 3 tipi: $\rightarrow$ solo $\{0\}$

$\rightarrow$ tutte le rette che passano per 0.

$\rightarrow$ tutto $\mathbb{R}^2$

Appena contiene un vettore non nullo, contiene tutti i suoi multipli (retta per l'origine). Se contiene 2 vett. lin. indip., allora è tutto $\mathbb{R}^2$ (in $\mathbb{R}^2$ ogni 2 vett. lin. indip. sono una base).

Esercizio 3 Come sono fatti tutti i s.sp. vett. di $\mathbb{R}^3$?

Quattro tipi: $\rightarrow$ solo $\{0\}$ dim 0

$\rightarrow$ rette per l'origine dim 1

$\rightarrow$ piani per l'origine dim 2

$\rightarrow$ tutto $\mathbb{R}^3$ dim 3

Siano V e W due s.sp. di dim 1 in $\mathbb{R}^3$, cioè due rette per l'origine. Supponiamo $V \cap W = \{0\}$, cioè che si intersecano solo nell'origine. Chi è $V + W$?

È tutto il piano per l'origine che contiene le 2 rette.
Inoltre la somma è diretta.

$$\underset{\substack{\text{"} \\ 2}}{\dim(V+W)} + \underset{\substack{\text{"} \\ 0}}{\dim(V \cap W)} = \underset{\substack{\text{"} \\ 1}}{\dim V} + \underset{\substack{\text{"} \\ 1}}{\dim W}$$

Esercizio 4 Siano V e W due piani in $\mathbb{R}^3$.
Quanto può valere $\dim(V \cap W)$?

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$

Nella prima riga i 2 piani coincidono, sia tra di loro, sia con la loro somma e intersezione.

Nella seconda riga, i due piani si intersecano in una retta, e la loro somma è tutto $\mathbb{R}^3$.

La somma di 2 piani in $\mathbb{R}^3$ non può essere dritta.

Esempio 5 Sia V un s.sp. di dim 17 di $\mathbb{R}^{25}$

Sia W un s.sp. di dim. 15 di $\mathbb{R}^{25}$.

Quanto vale come minimo $\dim(V \cap W)$?

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

$\begin{matrix} 17 \\ 18 \\ \vdots \\ 25 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 15 \\ \vdots \\ 7 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 17 \\ 17 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 15 \\ 15 \end{matrix}$

La prima riga dice che $W \subseteq V$.

— 0 — 0 —