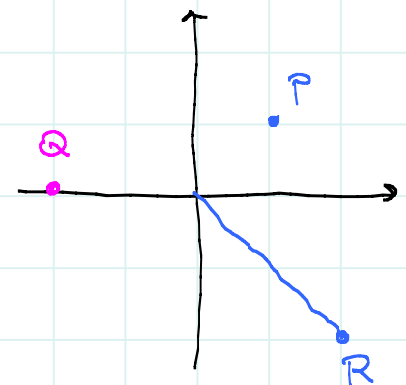
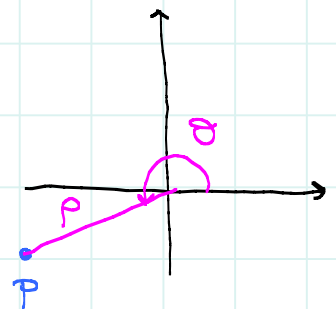
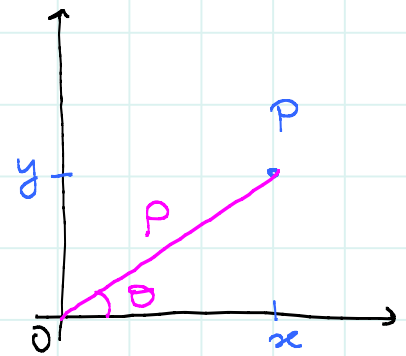


COORDINATE POLARI NEL PIANO

Dato un p.to P nel piano, lo possiamo descrivere

- mediante le sue cartesiane (x, y)
- mediante le coord. polari ρ e θ , dove
 - ρ = distanza di P dall'origine
 - θ = angolo che OP forma con il semiasse positivo delle x , pensato in senso antiorario a partire dall'asse



Esempi $P = (1, 1) \rightsquigarrow \rho = \sqrt{2}$
 $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$Q = (-2, 0) \rightsquigarrow \rho = 2$
 $\theta = \pi = 180^\circ$

$R = (2, -2) \rightsquigarrow \rho = 2\sqrt{2}$
 $\theta = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$
 $= -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$

- Oss.
- ρ è sempre un numero ≥ 0
 - θ è definito a meno di multipli di 2π (0 360°)
 - L'origine ha $\rho = 0$ e θ non ben definito (ogni θ va bene).

FORMULE DI PASSAGGIO

Se conosco ρ e θ , come trovo x e y ?

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

trigonometria nei
triangoli rettangoli

Se conosco x e y , come trovo ρ e θ ?

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Trovare θ è più complicato e occorre sempre guardare la figura!

Se il pto sta sugli assi, θ si trova subito dalla figura.

Altrimenti da

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

dividendo troviamo

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

da cui si potrebbe dedurre che

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Formula pericolosa perché vale
solo nel 1° e nel 4° quadrante
(nel 2° e nel 3° occorre
aggiungere π)

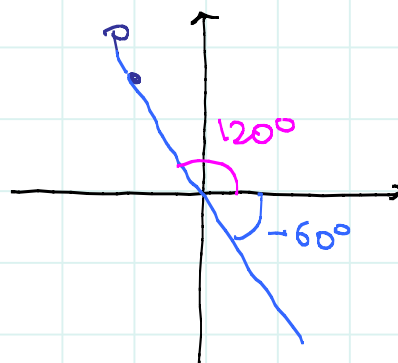
Esempio $P = (-1, \sqrt{3})$

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = 120^\circ$$

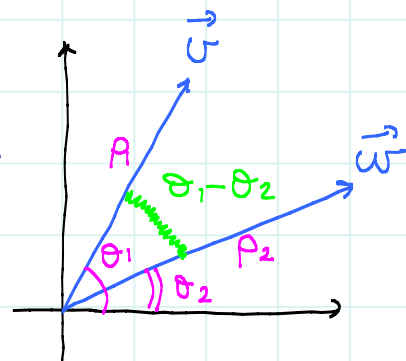
$$\tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}$$



Interpretazione geometrica del prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{v} = (x_1, y_1) \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$
$$\vec{w} = (x_2, y_2)$$

1° modo Scriviamo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in coord. polari

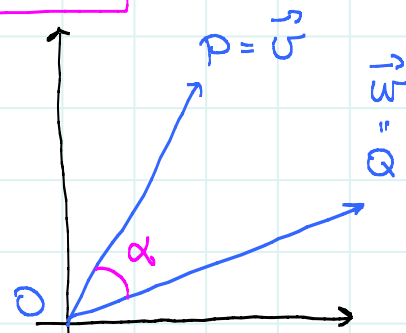
$$x_1 = \rho_1 \cos \theta_1 \quad x_2 = \rho_2 \cos \theta_2$$
$$y_1 = \rho_1 \sin \theta_1 \quad y_2 = \rho_2 \sin \theta_2$$


$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 &= \rho_1 \rho_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \rho_1 \rho_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\text{angolo compreso})$$

2° modo Guardiamo il triangolo OPQ

$$OP = \|\vec{v}\|$$
$$OQ = \|\vec{w}\|$$
$$PQ = \|\vec{v} - \vec{w}\|$$



Per il teorema del coseno (aka teorema di CARNOT) vale che

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 OP \cdot OQ \cdot \cos \alpha$$
$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$$
$$\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\leadsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$$

angolo compreso

In particolare: se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono nulli, allora

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \iff \cos \alpha = 0 \iff \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ sono perpendicolari}$$

— 0 — 0 —

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

Il valore assol. del prod. scalare
è $\leq$ del prodotto delle
norme

Dim in $\mathbb{R}^2$

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \underbrace{|\cos \alpha|}_{\leq 1} \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

Dim in generale

Dati $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, per ogni $t \in \mathbb{R}$
consideriamo il vettore
 $\vec{v} + t\vec{w}$

Osserviamo che

$$\|\vec{v} + t\vec{w}\|^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \|\vec{v}\|^2 + \|t\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v}, t\vec{w} \rangle \\ &= \|\vec{v}\|^2 + t^2 \|\vec{w}\|^2 + 2t \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\|\vec{w}\|^2 t^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle t + \|\vec{v}\|^2 \geq 0$$

polinomio di 2° grado nella
variabile t che è sempre ≥ 0

Questo è possibile solo se $\Delta = \text{discriminante} \leq 0$ (altrimenti
avrebbe 2 radici e da qualche parte sarebbe negativo) cioè

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \leq 0$$

cioè

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2$$

Facendo $\sqrt{\quad}$ a destra e sinistra ottengo la tesi.

Stessa dim, usando i punti Parto da

$$(x_1 + t y_1)^2 + \dots + (x_n + t y_n)^2 \geq 0 \quad (\text{sono tutti } \square)$$

Esponendo ho

$$\underbrace{(y_1^2 + \dots + y_n^2)}_A t^2 + 2 \underbrace{(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}_B t + \underbrace{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}_C \geq 0$$

Al solito modo troviamo $B^2 - AC \leq 0 \leadsto B^2 \leq AC$

Interpretando A, B, C usando norme e prod. scalari, abbiamo la tesi.

— o — o —