

A.A. 2021/2022
Modulo di Algebra Lineare
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Vettori geometrici nel piano cartesiano. Operazioni tra vettori: somma, prodotto per un numero, prodotto scalare, norma, distanza. Quadrato della norma della somma e della differenza di due vettori.	9
Lezione 02. Coordinate polari nel piano. Interpretazione geometrica del prodotto scalare (usando le coordinate polari o il teorema di Carnot). Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (dimostrazione algebrica e interpretazione geometrica). Calcolo dell'angolo tra due vettori.	14
Lezione 03. Rette nel piano: equazione cartesiana vs equazione parametrica. Passaggio da una rappresentazione all'altra. Significato dei coefficienti nei vari tipi di rappresentazione. Calcolo dell'angolo tra due rette.	19
Lezione 04. Introduzione ai sistemi lineari. Sistemi omogenei e non omogenei. Esempi con soluzione unica, nessuna soluzione, infinite soluzioni. Primi esempi di risoluzione.	24
Lezione 05. Matrici a scala e pivot. Algoritmo di Gauss. Interpretazione dei risultati dell'algoritmo di Gauss. Esempi di applicazione. Variante alla Jordan dell'algoritmo di Gauss.	29
Lezione 06. Mutua posizione di due rette nel piano. Intersezione di due rette nel piano (date in varia forma). Equazione parametrica di una retta nello spazio. Mutua posizione di due rette nello spazio. Angolo tra due rette (nel piano e nello spazio).	33
Lezione 07. Piani nello spazio: equazione cartesiana e parametrica. Significato geometrico dei coefficienti nell'equazione cartesiana. Passaggio dalla cartesiana alla parametrica e viceversa. Formula per determinare un vettore nello spazio perpendicolare a due vettori dati. Mutua posizione di due piani nello spazio.	38
Lezione 08. Mutua posizione di una retta ed un piano nello spazio. Calcolo dell'angolo tra una retta ed un piano. Distanza di un punto da una retta nel piano. Distanza di un punto da un piano e da una retta nello spazio.	42
Lezione 09. Matrici e operazioni tra matrici: somma, prodotto per un numero, trasposta, prodotto tra matrici. Matrice identica e sue proprietà. Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna.	47
Lezione 10. La trasposta del prodotto è il prodotto delle trasposte (in ordine inverso). Interpretazione dei sistemi lineari in termini di matrici. Esercizi di geometria analitica: varie formule per l'area di un triangolo dati i vertici, rette che formano un angolo dato con una retta assegnata.	52

Lezione 11. Definizione di campo di numeri e di spazio vettoriale. Esempi classici di campo e spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali: definizione e primi esempi.	56
Lezione 12. Definizioni: combinazione lineare, Span, sistema di generatori, vettori linearmente indipendenti e dipendenti, base. Esempi di verifica che alcuni sottoinsiemi sono basi. Lo Span è un sottospazio vettoriale. Componenti di un vettore rispetto ad una base: definizione ed unicità.	61
Lezione 13. Spazi di dimensione finita. Esempio di spazio di dimensione infinita. Esempi di basi canoniche in alcuni spazi vettoriali classici. Tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi. Come ottenere basi per eliminazione da un sistema di generatori o aggiungendo elementi ad un insieme di vettori linearmente indipendenti. Lemma di eliminazione.	66
Lezione 14. Lemma di sostituzione e conseguenze: in uno spazio di dimensione n , per dimostrare che n vettori sono una base basta verificare la lineare indipendenza o l'essere generatori. Esempi di basi e componenti in spazi vettoriali.	70
Lezione 15. Intersezione e somma di sottospazi vettoriali. Somma diretta di sottospazi e componenti di un vettore rispetto ad una somma diretta. Formula di Grassmann. Esempi ed esercizi.	75
Lezione 16. Definizione di applicazione lineare. Comportamento rispetto ad una combinazione lineare. Teorema di struttura. Primi esempi. Matrice associata ad un'applicazione lineare dopo aver scelto basi in partenza ed arrivo.	80
Lezione 17. Esempi di costruzione ed utilizzo della matrice associata ad un'applicazione lineare. Filosofia generale: spazi vettoriali e applicazioni lineari vs numeri e matrici. Matrice di cambio di base: costruzione ed utilizzo.	85
Lezione 18. Ker e immagine di un'applicazione lineare. Teorema rank-nullity (relazione tra le dimensioni di ker, immagine e spazio di partenza). Conseguenze in termini di iniettività e surgettività.	90
Lezione 19. Interpretazione dei sistemi lineari in termini di combinazioni lineari (legami con span, lineare indipendenza, generatori) e in termini di ker e immagine di un'opportuna applicazione lineare. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo (soluzione qualunque più soluzione generica dell'omogeneo).	95
Lezione 20. Sottospazi vettoriali: rappresentazione cartesiana e parametrica. Esercizi sui sottospazi vettoriali: passaggio dalla forma cartesiana a quella parametrica, calcolo della base e della dimensione, della somma ed intersezione.	100
Lezione 21. Matrice inversa e legami con l'applicazione inversa. Inversa del prodotto e della trasposta. Calcolo mediante l'algoritmo alla Gauss-Jordan: descrizione e giustificazione dell'algoritmo. Uso delle matrici inverse nei cambi di base.	104
Lezione 22. Introduzione ai determinanti: obiettivi, definizione assiomatica, prime proprietà (alternanza e annullamento nel caso di vettori linearmente dipendenti). Enunciato del teorema di esistenza ed unicità. Caso 2×2 con interpretazione geometrica.	109

Lezione 23. Determinante nel caso 3×3 e regola di Sarrus. Determinante e algoritmo di Gauss. Determinante di matrici diagonali e triangolari superiori. Se i vettori sono linearmente indipendenti, allora il determinante è diverso da zero.	114
Lezione 24. Sottomatrici e minori. Sviluppi di Laplace (ricorsivi) per colonne e per righe. Esistenza del determinante: enunciato via sviluppi per colonne e idea della dimostrazione. Unicità del determinante via algoritmo di Gauss. Dimostrazione che gli sviluppi per righe coincidono con quelli per colonne. Determinante della matrice trasposta.	119
Lezione 25. Descrizione dello sviluppo di Leibniz (con le permutazioni) del determinante. Teorema di Binet (il determinante del prodotto è il prodotto dei determinanti). Determinante della matrice inversa. Utilizzo dei determinanti per dimostrare la lineare indipendenza di vettori.	124
Lezione 26. Formula per i vettori perpendicolari e sua interpretazione con i determinanti. Formula di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare. Formula per la matrice inversa con i determinanti.	130
Lezione 27. Rango di una matrice. Dimostrazione completa dell'equivalenza tra R-rango, C-rango, D-rango. Rango ed algoritmo di Gauss. Pivot e rango delle matrici a scala.	136
Lezione 28. Rango e sistemi lineari: teorema di Rouché-Capelli. Esempi di studio di sistemi lineari dipendenti da parametri.	141
Lezione 29. Esercizi misti sulla prima parte del corso: studio del rango di una matrice dipendente da parametri, matrice associata ad una applicazione lineare con diversa scelta delle basi.	146
Lezione 30. Esercizi misti sulla prima parte del corso: studio di un'applicazione lineare tra spazi di polinomi, calcolo delle matrici di proiezione rispetto ad una somma diretta.	151
Lezione 31. Basi ortogonali e ortonormali. Componenti di un vettore rispetto a tali basi. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.	155
Lezione 32. Ortogonale di un sottospazio e sue proprietà. Somme dirette ortogonali. Proiezione ortogonale su un sottospazio. Esempi di calcolo di basi ortogonali e di proiezioni ortogonali.	160
Lezione 33. Matrici ortogonali: caratterizzazione e proprietà. Struttura delle matrici ortogonali 2×2 . Trucco per velocizzare il calcolo dell'inversa di una matrice con righe o colonne ortogonali. Ulteriori esempi di basi e proiezioni ortogonali.	165
Lezione 34. Introduzione alle forme canoniche (per applicazioni e matrici). Legami tra il caso delle applicazioni e quello delle matrici. Forma canonica di un'applicazione lineare potendo scegliere basi a piacere in partenza ed arrivo (dipende solo dal rango).170	

Lezione 35. Introduzione motivazionale alle forme canoniche per applicazioni da uno spazio in sé (stessa base in partenza ed arrivo) o per matrici quadrate. Autovalori, autovettori, autospazio, esempio di diagonalizzazione 2×2	174
Lezione 36. Polinomi: radici, molteplicità di una radice, teorema di Ruffini, teorema fondamentale dell'algebra e conseguenze, relazione tra i coefficienti e la somma/prodotto delle radici. Polinomio caratteristico di una matrice: definizione e legami dei suoi coefficienti con traccia e determinante.	179
Lezione 37. Definizione di matrici simili e dimostrazione che hanno uguali il polinomio caratteristico, gli autovalori, la traccia e il determinante. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore: definizione e relazione tra di esse. Enunciato della condizione necessaria e sufficiente e della condizione sufficiente per la diagonalizzabilità.	184
Lezione 38. Dimostrazione che la molteplicità geometrica è minore o uguale di quella algebrica. Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Dimostrazione della condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità.	189
Lezione 39. Spazio delle matrici simmetriche. Applicazioni lineari simmetriche. Un'applicazione è simmetrica se e solo se ha matrice simmetrica rispetto ad una qualunque base ortonormale. Enunciato del teorema spettrale per applicazioni e matrici simmetriche. Dimostrazione delle implicazioni facili. Primi due lemmi: autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali, l'ortogonale di un sottospazio invariante è a sua volta invariante.	194
Lezione 40. Gli autovalori di una matrice reale simmetrica sono reali. Dimostrazione dell'implicazione delicata nel teorema spettrale. Esempi ed esercizi sulle forme canoniche.	199
Lezione 41. Introduzione alle forme quadratiche: definizione, matrice associata, forme (semi)definite positive/negative e indefinite, indici di inerzia. Primi esempi di studio del segno di una forma quadratica.	203
Lezione 42. Metodi per trovare la segnatura di una forma quadratica: segno degli autovalori e completamento dei quadrati. Utilizzo del completamento dei quadrati per trovare sottospazi di dimensione opportuna su cui una forma quadratica è definita positiva/negativa.	208
Lezione 43. Metodi per trovare la segnatura di una forma quadratica: regola di Cartesio per il segno delle radici di un polinomio e metodo dei minori orlati di Sylvester. Possibilità di procedere in varie direzioni nell'utilizzo del metodo di Sylvester. . .	213
Lezione 44. Blocchi e matrici di Jordan complesse. Ogni matrice quadrata complessa è simile ad una matrice di Jordan complessa. Blocchi e matrici di Jordan reali. Ogni matrice quadrata reale è simile ad una matrice di Jordan reale. Descrizione dell'algoritmo per passare dalla forma di Jordan complessa a quella reale.	217

Lezione 45. Esempi di calcolo di forme canoniche di matrici. Determinare la matrice di passaggio alla forma di Jordan reale conoscendo quella complessa. Calcolo della matrice di passaggio alla forma canonica di Jordan in presenza di blocchi di dimensione maggiore di 1.	222
Lezione 46. Definizione astratta di prodotto scalare e primi esempi. Matrice associata ad un prodotto scalare e suo utilizzo per il calcolo del prodotto stesso.	227
Lezione 47. Come varia la matrice associata ad un prodotto scalare quando si cambia base: matrici congruenti. Algoritmo di Gram-Schmidt per un prodotto scalare qualunque definito positivo. Teorema di Sylvester (Sylvester's law of inertia). Esempi di passaggio alla forma alla Sylvester.	232
Lezione 48. Applicazioni simmetriche rispetto ad un prodotto scalare generale e relativo teorema spettrale. Studio di un prodotto scalare definito mediante integrali in uno spazio di polinomi.	237
Lezione 49. Dimostrazione del legame tra il segno degli autovalori e indici di inerzia di una forma quadratica. Esempi di utilizzo del metodo di Sylvester anche in presenza di determinanti nulli strada facendo. Esempi sull'intersezione di sottospazi vettoriali.	242
Lezione 50. Teorema di Hamilton-Cayley: enunciato e dimostrazione nel caso diagonalizzabile. Polinomio minimo: definizione e suoi legami con il polinomio caratteristico e la forma di Jordan.	246
Lezione 51. Introduzione alla geometria affine. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini. Trasformazioni affini e loro composizioni. Omotetie nel piano. . .	251
Lezione 52. Le matrici affini conservano norma e prodotto scalare. Teorema di struttura delle isometrie nello spazio n-dimensionale. Matrici 2×2 ortogonali e relative isometrie del piano.	256
Lezione 53. Classificazione delle isometrie del piano sulla base del luogo dei punti fissi, con idea della dimostrazione. Esempi di rotazioni (rispetto a punti diversi dall'origine) e simmetrie. Esempi di classificazione di isometrie nel piano.	261
Lezione 54. Esercizi sulle isometrie del piano. Calcolo di immagine e controimmagine di rette e circonferenze mediante isometrie del piano. Casistica sulla composizione di due simmetrie.	266
Lezione 55. Autovalori di matrici simmetriche hanno modulo unitario. Classificazione delle matrici 3×3 ortogonali e relative isometrie dello spazio. Esempi di classificazione di isometrie lineari dello spazio.	270
Lezione 56. Classificazione delle isometrie dello spazio sulla base del luogo dei punti fissi. Esempi di scrittura di isometrie dello spazio sulla base della loro descrizione geometrica.	274
Lezione 57. Esercizi misti sulle isometrie dello spazio: espressione algebrica di una simmetria rispetto ad un piano che non passa per l'origine e di una rotazione rispetto ad un asse che non passa per l'origine. Orientazione di una base.	278

Lezione 58. Tre modi per calcolare la distanza tra due rette sghembe nello spazio. Tre modi per calcolare il volume di un tetraedro di cui sono noti i vertici.	282
Lezione 59. Semplici esempi di studio di ellissi ed iperboli nel piano (non in forma canonica). Esponenziali e funzioni trascendenti di matrici.	286
Lezione 60. Cambi di basi ed algoritmo jpeg.	290

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 01

Note Title

28/09/2021

- Geometria analitica
- Sistemi lineari
- Spazi vett. e applicazioni lineari
- Prodotti scalari

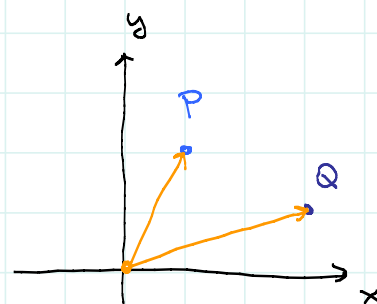
} MATRICE

GEOM. ANALITICA

Vettori geometrici

 $\mathbb{R}^2$ = coppie (x, y) di numeri reali $\mathbb{R}^3$ = terne (x, y, z) di num. reali $\vdots$ $\mathbb{R}^n$ = oggetti del tipo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
↑ ↑ ↑
numeri reali $\mathbb{R}^2$ si rappresenta con un piano $P = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ punto del piano

↑ posso pensarlo come vettore che è
 "applicato" nell'origine e ha la freccia
 in $(1, 2)$

Punti $\rightsquigarrow$ Vettori $Q = (3, 1) \in \mathbb{R}^2$ Operazioni fra vettori :

- somma
- prodotto per uno scalare
- prodotto scalare
- norma
- distanza

SOMMA DI VETTORI

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Esempio

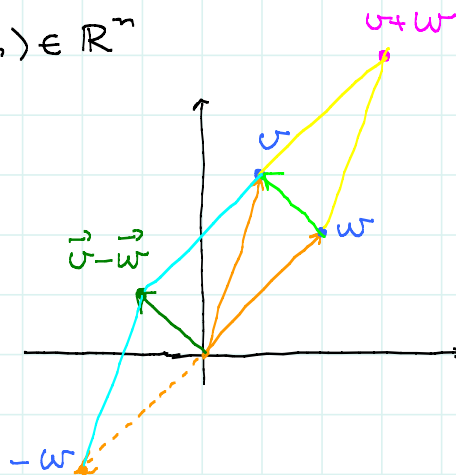
$$\vec{v} = (1, 3) \quad \vec{w} = (2, 2)$$

Allora

$$\vec{v} + \vec{w} = (3, 5)$$

= vettore ottenuto con la regola
del parallelogrammo

$$\vec{v} - \vec{w} = (-1, 1) \quad \begin{aligned} &= \text{vettore applicato in } \vec{w} \text{ con la punta in } \vec{v} \\ &= \text{qualcosa che aggiunto a } \vec{w} \text{ porta in } \vec{v}. \end{aligned}$$

**PRODOTTO PER UNO SCALARE**↑
numero

INPUT: un vettore e un numero

OUTPUT: vettore

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

↑
vettore

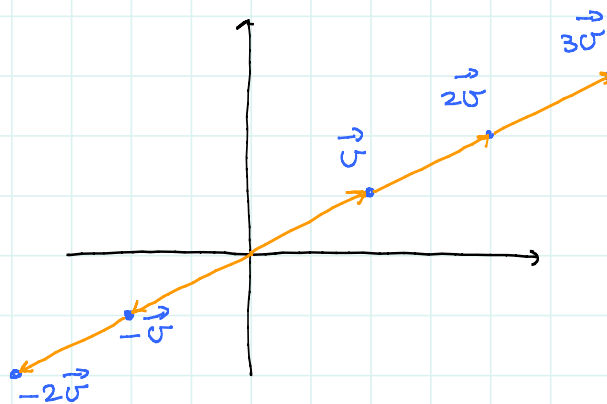
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

↑
scalare

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Geometricamente corrisponde
ad "allungare" o "accorciare"
il vettore

$\lambda < 0 \Rightarrow$ direzione opposta.



PRODOTTO SCALARE

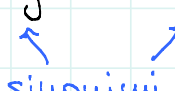
INPUT: 2 vettori

OUTPUT: 1 numero

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$



simonini

Proprietà del prodotto scalare

① Simmetrico $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ (banale)

② $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$



somma di vettori somma di numeri

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{y} + \vec{z} = (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$$

$$\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle &= x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + \dots + x_n (y_n + z_n) \\
 &= \underbrace{x_1 y_1} + \underbrace{x_1 z_1} + \underbrace{x_2 y_2} + \underbrace{x_2 z_2} + \dots + \underbrace{x_n y_n} + \underbrace{x_n z_n} \\
 &= \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} + \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle}
 \end{aligned}$$

③ $\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ per ogni $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori di $\mathbb{R}^n$
per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle &= x_1 (\lambda y_1) + x_2 (\lambda y_2) + \dots + x_n (\lambda y_n) \\
 &= \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 + \dots + \lambda x_n y_n \\
 &= \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \\
 &= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle
 \end{aligned}$$

NORMA

INPUT: vettore

OUTPUT: numero ≥ 0

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

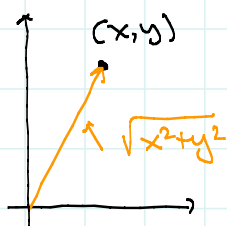
PITAGORONE a n componenti

↑

$$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

In $\mathbb{R}^2$ con $\vec{v} = (x, y)$, allora $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

= lunghezza del vettore
(Pitagora)

**DISTANZA**

INPUT: 2 vettori

OUTPUT: 1 numero ≥ 0

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad (\text{norma della differenza})$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Oss. $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$

Esercizio 1 Espandere $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

↑
proprietà ② sulla
seconda variabile

$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

↑
proprietà ③ sulla
prima variabile

↑
uguali

$$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

La stessa cosa vale per la differenza

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Esercizio 2

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

$\vec{x}$ vettore $\in \mathbb{R}^n$

$\lambda \in \mathbb{R}$ numero

$$\|\lambda \vec{x}\| = \left\{ (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \dots + (\lambda x_m)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2) \right\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2} \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}}_{\|\vec{x}\|}$$

$|\lambda|$ $\leftarrow$ valore assoluto di un numero

$\uparrow \uparrow$
occluso a questo passaggio

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 02

Note Title

28/09/2021

COORDINATE POLARI NEL PIANO

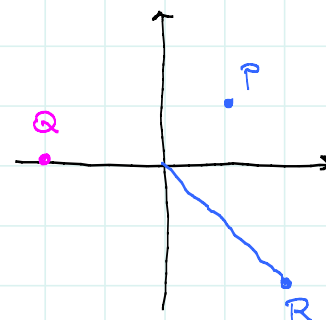
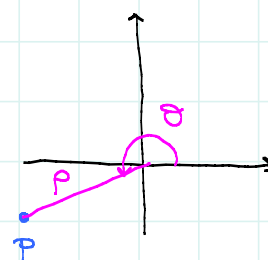
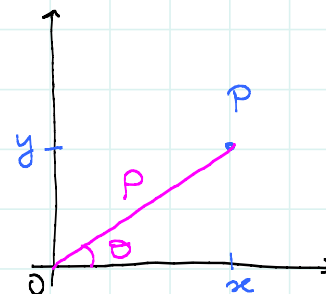
Dato un p.to P nel piano, lo possiamo descrivere

→ mediante le sue cartesiane (x, y)

→ mediante le coord. polari ρ e θ , dove

ρ = distanza di P dall'origine

θ = angolo che OP forma con il semiasse positivo delle x , pensato in senso antiorario a partire dall'asse



Esempi $P = (1, 1) \rightsquigarrow \rho = \sqrt{2}$
 $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$Q = (-2, 0) \rightsquigarrow \rho = 2$
 $\theta = \pi = 180^\circ$

$R = (2, -2) \rightsquigarrow \rho = 2\sqrt{2}$
 $\theta = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$
 $= -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$

- Oss.
- ρ è sempre un numero ≥ 0
 - θ è definito a meno di multipli di 2π (o 360°)
 - L'origine ha $\rho = 0$ e θ non ben definito (ogni θ va bene).

FORMULE DI PASSAGGIO

Se conosco ρ e θ , come trovo x e y ?

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

trigonometria nei
triangoli rettangoli

Se conosco x e y , come trovo ρ e θ ?

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Trovare θ è più complicato e occorre sempre guardare la figura!

Se il pto sta sugli assi, θ si trova subito dalla figura.

Altrimenti da

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

dividendo troviamo

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

da cui si potrebbe dedurre che

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Formula pericolosa perché vale
solo nel 1° e nel 4° quadrante
(nel 2° e nel 3° occorre
aggiungere π)

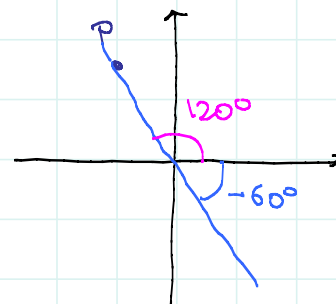
Esempio $P = (-1, \sqrt{3})$

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = 120^\circ$$

$$\tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}$$



Interpretazione geometrica del prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{v} = (x_1, y_1) \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{w} = (x_2, y_2)$$

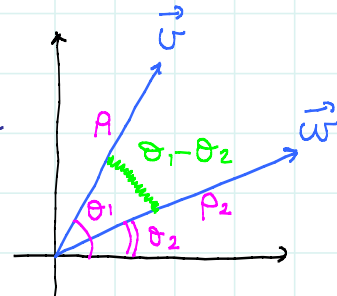
1° modo Scriviamo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in coord. polari

$$x_1 = \rho_1 \cos \theta_1$$

$$y_1 = \rho_1 \sin \theta_1$$

$$x_2 = \rho_2 \cos \theta_2$$

$$y_2 = \rho_2 \sin \theta_2$$



$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 &= \rho_1 \rho_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \rho_1 \rho_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

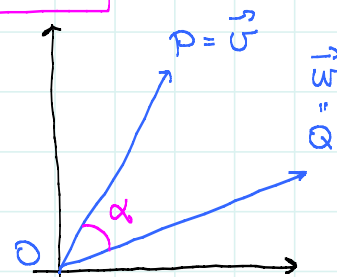
$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\text{angolo compreso})$$

2° modo Guardiamo il triangolo OPQ

$$OP = \|\vec{v}\|$$

$$OQ = \|\vec{w}\|$$

$$PQ = \|\vec{v} - \vec{w}\|$$



Per il teorema del coseno (aka teorema di CARNOT) vale che

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 OP \cdot OQ \cdot \cos \alpha$$

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$$

"

$$\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

~

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$$

angolo compreso

In particolare : se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono nulli, allora

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ sono perpendicolari}$$

— 0 — 0 —

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

Il valore assol. del prod. scalare
è $\leq$ del prodotto delle
norme

Dim in $\mathbb{R}^2$

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \underbrace{|\cos \alpha|}_{\leq 1} \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

Dim in generale Dati $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, per ogni $t \in \mathbb{R}$
consideriamo il vettore
 $\vec{v} + t\vec{w}$

Osserviamo che

$$\|\vec{v} + t\vec{w}\|^2 \geq 0$$

"

$$\begin{aligned} & \|\vec{v}\|^2 + \|t\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v}, t\vec{w} \rangle \\ &= \|\vec{v}\|^2 + t^2 \|\vec{w}\|^2 + 2t \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\underbrace{\|\vec{w}\|^2 t^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle t + \|\vec{v}\|^2}_{\text{polinomio di 2° grado nella}} \geq 0$$

variabile t che è sempre ≥ 0

Questo è possibile solo se $\Delta = \text{discriminante} \leq 0$ (altrimenti avrebbe 2 radici e da qualche parte sarebbe negativo) cioè

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \leq 0$$

cioè

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2$$

Facendo $\sqrt{\quad}$ a destra e sinistra ottengo la tesi.

Stessa dim, usando i punti Parto da

$$(x_1 + t y_1)^2 + \dots + (x_n + t y_n)^2 \geq 0 \quad (\text{sono tutti } \square)$$

Esponendo ho

$$\underbrace{(y_1^2 + \dots + y_n^2)}_A t^2 + 2 \underbrace{(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}_B t + \underbrace{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}_C \geq 0$$

Al solito modo troviamo $B^2 - AC \leq 0 \leadsto B^2 \leq AC$

Interpretando A, B, C usando norme e prod. scalari, abbiamo la tesi.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 03

Note Title

28/09/2021

RETTE NEL PIANO

→ rappresentazione cartesiana $\nearrow$ implicita
 $\searrow$ esplicita

→ rappresentazione parametrica

CARTESIANA

Implicita $ax + by + c = 0$

Esplicita $y = mx + n$

Esplicita: PRO: comunque fisso m ed n ottengo retta sensata
 rette diverse hanno almeno un parametro diverso

CONTRO: non rappresenta le rette verticali, che
 hanno equ. $x = x_0$

Implicita: PRO: rappresenta tutte le rette

CONTRO: non è vero che ogni scelta di a, b, c
 produce rette sensate ($a=b=0, c=5$)
 non è detto che parametri diversi producano
 rette diverse ($x+y-3=0$
 $2x+2y-6=0$)

Passare dall'una all'altra è sostanzialmente banale

Esempi $y = \frac{2}{3}x - 5 \rightsquigarrow 2x - 3y - 15 = 0$

$3x - 2y + 7 = 0 \rightsquigarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

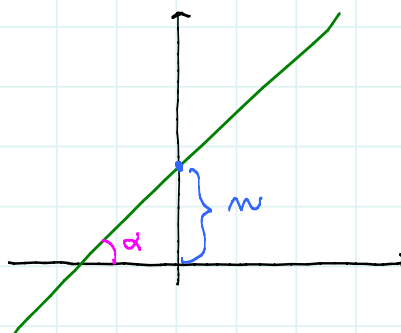
Significato geometrico di m ed n nella esplicita

$$y = mx + n$$

↑
coeff. angolare

$$m = \tan \alpha$$

↑
angolo tra retta e
semiasse positivo delle x



Esempio Determinare il coeff. angolare della retta che passa per $(2021, 712)$ e $(2023, 709)$

$(2021, 712)$

$(2023, 709)$

$$m = -\frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$$

↑
spost. vert.

↑
spost. orizz.

Due rette in forma esplicita
sono

$$y = m_1x + m_1$$

$$y = m_2x + m_2$$

• parallele $\Leftrightarrow m_1 = m_2$

• perpendicolari $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$ (occluso al caso particolare $m_2 = 0$)

Caso parallele

$$m_1 = \tan \alpha_1$$

$$m_2 = \tan \alpha_2$$

Perpendicolari $\Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ e quindi

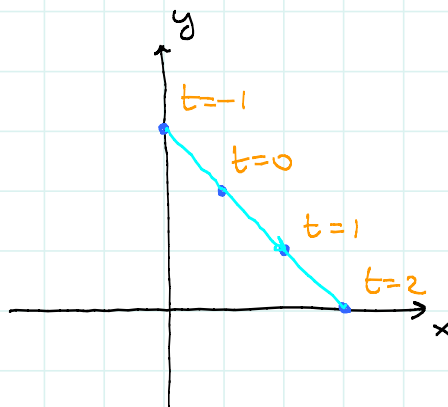
$$\tan \alpha_2 = \tan \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sin \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{-\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$$

PARAMETRICA La rapp. è del tipo

$$(a,b) + t(c,d) \quad \text{con } (c,d) \neq (0,0)$$

Esempio $(1,2) + t(1,-1)$

Al variare di $t \in \mathbb{R}$, la formula di sopra descrive la posizione di un omniù.



$$t=0 \rightsquigarrow (1,2)$$

$$t=1 \rightsquigarrow (1,2) + (1,-1) = (2,1)$$

$$t=2 \rightsquigarrow (1,2) + 2(1,-1) = (3,0)$$

$$t=-1 \rightsquigarrow (1,2) - (1,-1) = (0,3)$$

Quindi

$$\underbrace{(a,b)}_{\substack{\uparrow \\ \text{posizione} \\ \text{al tempo } t=0}} + t \underbrace{(c,d)}_{\substack{\uparrow \\ \text{direzione} \\ \text{di spostamento}}} = (a+ct, b+dt)$$

In linguaggio vettoriale possiamo scrivere

$$\vec{U}_0 + t \vec{U}$$

Tornando all'esempio di inizio pagina

$$P(2021, 712)$$

•

Posso scrivere la retta come

$$P + t(Q - P)$$

$$(2021, 712) + t(2, -3)$$

$$Q(2023, 709)$$

•

La rappresentazione non è unica
 $Q + t(P - Q)$ va bene uguale

Come passo dalla cartesiana alla parametrica?

Scelgo 2 p.ti a caso e poi ragiono come sopra.

Esempio $2x + 3y + 5 = 0 \rightsquigarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

$$x = -1 \rightsquigarrow y = -1$$

$$x = 2 \rightsquigarrow y = -3$$

Quindi la retta passa per

$$P = (-1, -1) \text{ e } Q = (2, -3)$$

$$P + t(Q - P) = (-1, -1) + t(3, -2)$$

Nota bene: coeff. ang. = $-\frac{2}{3}$

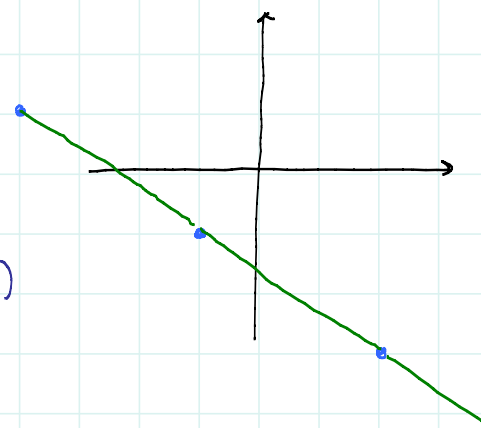
Le possibili rappr. sono infinite

$$Q + t(P - Q) = (2, -3) + t(-3, 2)$$

Altre possibili

$$(-1, 1) + t(-3, 2)$$

$$(-1, 1) + t(6, -4)$$



Come passo dalla parametrica alla cartesiana?

Esempio $(5, 2) + t(-1, 3)$

1° modo Sostituisco 2 valori di t , e poi scrivo la retta per 2 p.ti

$$t = 0 \rightsquigarrow (5, 2)$$

$$t = 1 \rightsquigarrow (4, 5)$$

$y = mx + n$ Impongo il passaggio $\begin{cases} 2 = 5m + n \\ 5 = 4m + n \end{cases}$

Risolvere e trovo m ed n ($m = -3$, $n = 17$)

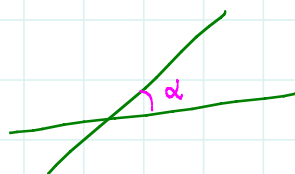
2° modo

$$(5, 2) + t(-1, 3) = (\underset{x}{5-t}, \underset{y}{2+3t})$$

Ricavo t da x e sostituisco in y :

$$\begin{aligned} 5-t &= x \rightsquigarrow t = 5-x \rightsquigarrow y = 2+3t = 2+3(5-x) \\ &= 2+15-3x \\ &= 17-3x \end{aligned}$$

(C)

Angolo tra 2 rette

In parametrica è l'angolo tra le direzioni, che si calcola dalla formula con il prod. scalare

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

- LEZIONE 04

Note Title

01/10/2021

Sistemi lineari

Equazione lineare: equazione in cui compaiono solo somme delle incognite moltiplicate per coeff. più termini noti

$$2x - 3y + 7z = 25$$

Diagram illustrating the components of the linear equation $2x - 3y + 7z = 25$:

- coeff.** (coefficients) point to 2, -3, and 7.
- incognite** (unknowns) point to x , y , and z .
- termine noto** (constant term) points to 25.

General form: $a_1x + a_2y + \dots + a_nz = b$, where a_i are coefficients and b is the constant term.

Un sistema lineare è un sistema costituito da equ. lineari

Esempi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases} \quad \text{2 equ. in 2 incognite}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -2 \\ x + 2z = 25 \end{cases} \quad \text{2 equ. in 3 incognite}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \text{3 equ. in 2 incognite}$$

Prima classificazione

→ sistema **OMOGENEO** se tutti i termini noti sono $= 0$

→ sistema **NON OMOGENEO** se almeno un termine noto è $\neq 0$.

Oss Un sistema omogeneo ammette sempre almeno una soluzione, cioè quella con tutte le incognite = 0.
 Poi a seconda dei casi possono esserci altre sol. oppure no.

Per un sistema LINEARE in generale ci sono (solo) 3 possibilità

- il sistema ammette SOLUZIONE UNICA
- il sistema NON HA SOLUZIONI (impossibile)
- il sistema ha INFINITE SOLUZIONI, dipendenti da un certo numero di parametri che possiamo scegliere a piacere.

Esempio 1
$$\begin{cases} x+y = 2 \\ x-3y = 5 \end{cases}$$

Metodo banale Dalla 2ª equ: $x = 3y + 5$ Vado nella 1ª:

$$(3y+5)+y = 2 \rightsquigarrow 4y = -3 \rightsquigarrow y = -\frac{3}{4}$$

A questo punto

$$x = 3y + 5 = -\frac{9}{4} + 5 = \frac{11}{4}$$

L'unica soluzione è $(x, y) = \left(\frac{11}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ ← VERIFICARE CHE SIA SOLUZIONE

Metodo che ha futuro 1ª equ. - 2ª equ : $4y = -3 \rightsquigarrow y = -\frac{3}{4}$

3 · 1ª equ + 2ª equ. $4x = 11 \rightsquigarrow x = \frac{11}{4}$

Esempio 2
$$\begin{cases} 2x-3y = 8 \\ 4x-6y = 11 \end{cases}$$

2 · 1ª equ : $4x-6y = 16$

$4x-6y = 11$



Non ci sono soluzioni

$$\begin{cases} 2x-4y = 5 & \cdot 3 \\ 3x-6y = 4 & \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x-12y = 15 \\ 6x-12y = 8 \end{cases} \quad \text{☹}$$

Esempio 3
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$$

Osservo che tutta la 2^a equ., fermi i coefficienti compresi, è il doppio della prima, quindi inutile. Quindi basta risolvere la 1^a

$$x - 2y = 4 \quad \leadsto \quad x = 2y + 4$$

A y posso dare i valori che voglio, e mi trovo x di conseguenza

$$y = t \quad x = 2t + 4 \quad (x, y) = (2t + 4, t) \\ = (4, 0) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro libero}}}{t} (2, 1)$$

Nota bene: quella scritta è la forma parametrica della retta $x - 2y = 4$.

Esempio 4
$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

Ricopro la 1^a riga
2^a riga - 2 · 1^a riga
3^a riga - 1^a riga

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - 3z = -5 \\ 3y - 3z = -5 \end{cases} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{uguali} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Quindi il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - 3z = -5 \end{cases}$$

Pongo $z = t$ ^{2^a} $\leadsto 3y = 3z - 5 = 3t - 5 \leadsto y = t - \frac{5}{3}$

^{1^a} $\leadsto x = y - z + 3 = \cancel{t} - \frac{5}{3} - \cancel{t} + 3 \leadsto x = \frac{4}{3}$

Conclusione: il sistema ha infinite soluzioni date dalla formula

$$(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, t - \frac{5}{3}, t \right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0 \right) + t(0, 1, 1)$$

Come sempre fare la verifica

↑
risolve il sistema
se fosse
omogeneo

Esempio 5

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -z = -11 \end{cases} \quad 2^a - 2 \cdot 1^a$$

$$z = 11 \xrightarrow{1^a} \begin{aligned} x + y + 11 &= 7 \rightarrow x + y = -4 \\ y = t &\rightarrow x = -t - 4 \end{aligned}$$

Soluzione generale: $(x, y, z) = (-t - 4, t, 11)$

$$= \boxed{(-4, 0, 11)} + t \boxed{(-1, 1, 0)}$$

↑
risolve il sistema
vero

↑
risolverebbe il
sistema omog.

Insieme risolvono il sistema vero per ogni valore di t .

Esempio 6 $x - y + 3z = 5$ 1 equ. in 3 incognite

$$z = t, y = s \rightarrow x = y - 3z + 5 = s - 3t + 5$$

Soluz. generale: $(s - 3t + 5, s, t)$

$$= (5, 0, 0) + t(-3, 0, 1) + s(1, 1, 0)$$

↑
2 parametri liberi

Esempio 7

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ x - w = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ x - w = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ -z - w = -4 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

 $3^a - 1^a$

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ -z - w = -4 \\ z - w = -2 \end{cases}$$

 $4^a - 2^a$

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ z + w = 4 \\ -2w = -6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(cambio segno)} \\ 3^a + 4^a \end{matrix}$$

$$w = 3 \rightsquigarrow z = -w + 4 = 1 \rightsquigarrow y = -w + 2 = -1 \\ \rightsquigarrow x = 5 - z = 4$$

Soluzione unica $(x, y, z, w) = (4, -1, 1, 3)$ ← verifica!
 — 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 05

Note Title

01/10/2021

Algoritmo di GAUSS-JORDAN

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{Matrice associata al sistema}$$

Copia R_1 $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$

$R_2 - R_1$ $\begin{array}{cccc} 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}$

$R_3 - 2R_1$ $\begin{array}{cccc} 0 & -3 & -7 & -1 \end{array}$

Copia R_1 $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$

Copia R_2 $\begin{array}{cccc} 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}$

$R_3 - R_2$ $\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}$

Se riscriviamo con le variabili, abbiamo

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$-3y - 2z = 1$$

$$-5z = -2$$

$$z = \frac{2}{5} \leadsto 3y = -2z - 1 = -\frac{4}{5} - 1 = -\frac{9}{5}$$

$$\leadsto y = -\frac{3}{5} \leadsto \text{ricavo } x \text{ dalla } 1^a$$

VERIFICA

Obiettivo: ARRIVARE AD AVERE LA FORMA A SCALA

Esempio 2 (quello di prima era 1)

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ x - 3y + z = 4 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Copia la 1^a $\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}$
 Copia la 2^a $\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$
 $R_3 - R_1$ $\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}$

Copia la 1^a $\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}$
 Copia la 2^a $\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$
 $R_3 - 3R_2$ $\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -3 & -18 \end{array}$

$$x - 3y + z = 4$$

$$y + z = 5$$

$$-3z = -18$$

$$\leadsto z = 6$$

$$y = -1$$

$$x = 4 + 3y - z = -5$$

$\leadsto$ Soluzione unica $(x, y, z) = (-5, -1, 6)$ ← VERIFICA OK

Una matrice a scala a tutte le righe di questo tipo

$$\underbrace{000 \dots 00}_{\text{un po' di 0 iniziali, magari anche nessuno}} \quad \underbrace{\circledast}_{\substack{\uparrow \\ \text{tizio non nullo} \\ \uparrow \\ \text{PIVOT}}} \quad \underbrace{* * * * *}_{\substack{\uparrow \\ \text{eventuale altra roba uguale o diversa da 0.}}}$$

Inoltre ogni riga ha almeno uno zero iniziale in più della precedente.

Lavorando alla Gauss, possiamo trasformare ogni matrice in una matrice a scala.

Le operazioni consentite sono due

→ scambiare 2 righe

→ Sostituire R_j con $aR_j + bR_i$ e a, b sono numeri
 $\uparrow$ altra riga ($i \neq j$)

Ci sono due versioni della mossa:

- Ultraortodossa : $a = 1$
- elastica o flessibile : $a \neq 0$.

Queste operazioni non cambiano le soluzioni del sistema, cioè i due sistemi prima e dopo hanno le stesse soluzioni.

Con la prima operazione è ovvio.

Vediamo la seconda

All'inizio $R_i = 0$ (supponendo tutto dalla stessa parte)

$$R_j = 0$$

Alla fine $R_i = 0$

$$a R_j + b R_i = 0$$

Viceversa, se $R_i = 0$ e $a R_j + b R_i = 0$, con $a \neq 0$, allora per forza anche $R_j = 0$

— 0 — 0 —

Esempi di matrici a scala (provenienti da sistemi 3×3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

↑

HA SOLUZ. UNICA

Dalla 3^a trovo z ,
dalla 2^a trovo y ,
dalla 1^a trovo x

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

↑

NON HA SOLUZ
(l'ultima equ.
è $0 = 2$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑

INFINITE SOLUZ

$$2x + 3y = 1$$

$$4z = 1$$

$$z = \frac{1}{4} \quad y = t \quad x = -\frac{3}{2}y + 1$$

$$= -\frac{3}{2}t + 1$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}t + 1, t, \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(1, 0, \frac{1}{4}\right) + t \left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right)$$

$$= \left(1, 0, \frac{1}{4}\right) + t (-3, 2, 0)$$

↑
invece di t uso $2t$
come parametro

TEORIA Una volta ridotto a scala il sistema ha

- 0 soluzioni se c'è una riga con tutti 0 sui coeff. e un termine noto $\neq 0$
- 1 soluzione unica se ogni riga ha un solo 0 iniziale più della precedente, e così via fino all'ultima variabile
- ∞ soluzioni se c'è almeno una colonna corrisp. ai coeff. in cui manca il PIVOT

In termini di PIVOT:

- 0 solus. se c'è almeno un PIVOT nella colonna dei termini noti.
- solus. unica se ogni colonna dei coeff. ha il suo pivot
- infinite solus: c'è almeno una colonna dei coeff. in cui non c'è il pivot.

Tutte le variabili nella cui colonna non c'è il PIVOT si possono usare come parametri liberi.

Lavorando alla Gauss, si possono sempre mettere degli 0 sopra i PIVOT

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2R_1 - 3R_3 \\ 2R_2 - R_3 \\ \text{Copia } R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 5R_1 - 2R_2 \\ \text{Copia } R_2 \\ \text{Copia } R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 10 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \text{Adesso risolvere è banale.}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 06

Note Title

05/10/2021

Mutua posizione di 2 rette nel pianoDate due rette r_1 ed r_2 stabilire se sono

- ① COINCIDENTI, cioè la stessa retta (infinite intersezioni)
- ② PARALLELE (nessuna intersezione)
- ③ INCIDENTI (intersezione unica)

In tal caso ci chiediamo

→ qual è il p.to di intersezione

→ determinare l'angolo fra le due rette.

Le due rette possono essere date in varia forma

1° caso Conosco le forme cartesiane.

Le metto a sistema e risolvo

Esempio 1

$$y = 3x - 5$$

$$2x - 3y = 7$$

$$\begin{cases} -3x + y = -5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 7 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 31 \end{array} \right)$$

$$-7y = 31 \rightsquigarrow y = -\frac{31}{7}$$

$$\begin{aligned} -3x + y &= -5 \rightsquigarrow -3x = -5 - y \\ &= -5 + \frac{31}{7} = -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$x = \frac{4}{21}$$

Conclusione: le 2 rette sono incidenti e si incontrano in $\left(\frac{4}{21}, -\frac{31}{7}\right)$

Come calcolo l'angolo?

$$-3x + y = -5$$

$$2x - 3y = 7$$

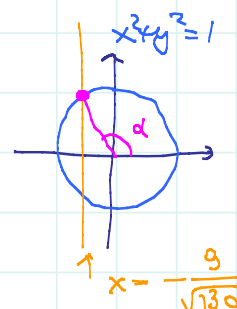
Consideriamo i vettori $(-3, 1)$ e $(2, -3)$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 coeff. di x e y nelle 2 implicite

FATTO GENERALE Scritta una retta come $ax+by+c=0$
 oppure $ax+by=d$, allora (a,b) è un
 vettore $\perp$ alla retta.

Dando questo per buono, l'angolo che cerco è quello tra
 $v = (-3, 1)$ e $w = (2, -3)$

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{-6-3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{9}{\sqrt{130}}$$

da qui si può ricavare α



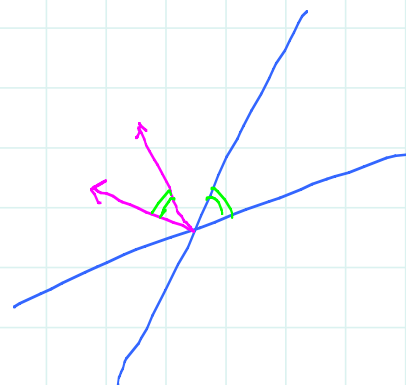
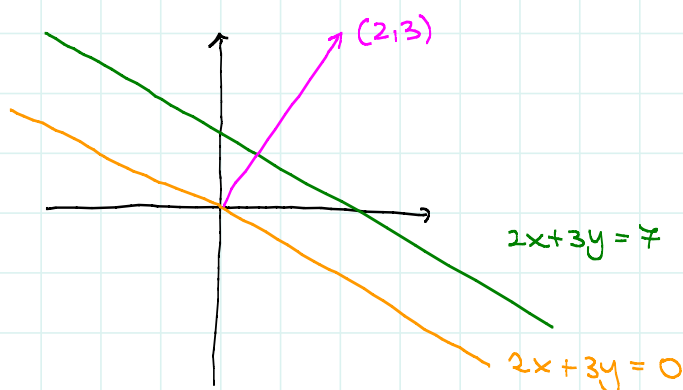
Come si vede il fatto generale?

Considero

$$2x+3y=7 \rightsquigarrow \text{retta } r$$

$$2x+3y=0 \rightsquigarrow \text{passa per l'origine ed è } \parallel \text{ ad } r$$

l'insieme di tutti i vettori (x,y) che
 sono $\parallel$ al vettore $(2,3)$



2° caso Le due rette sono date in forma parametrica

Esempio 2

$$(1, 2) + t(-1, 3)$$

$$(3, 1) + t(1, 1)$$

1° modo : passo in cartesiane e ragiono come prima

2° modo : lavoro direttamente in parametrica

$$r_1: (1-t, 2+3t)$$



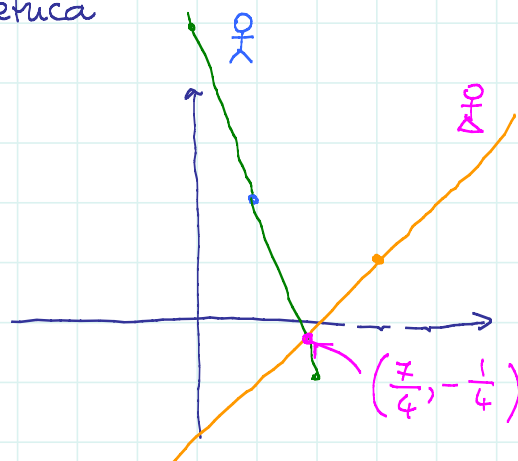
$$r_2: (3+t, 1+t)$$



Non bisogna mettere a sistema

$$\begin{cases} 1-t = 3+t \\ 2+3t = 1+t \end{cases}$$

Vorrebbe dire che fig e fig passano per il p.to in comune nello stesso tempo.



Da fare: uso 2 lettere diverse per il parametro

$$\begin{cases} 1-t = 3+s & t+s = -2 & \text{sommo: } 4t = -3 \Rightarrow t = -\frac{3}{4} \\ 2+3t = 1+s & 3t-s = -1 \end{cases}$$

Sostituendo t nella 1ª retta trovo $(1-t, 2+3t) = \left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Verifica: ricavo s dal sistema, sostituisco nella seconda retta e trovo lo stesso punto.

In questo per l'angolo basta fare l'angolo tra le 2 direzioni

$$\cos \alpha = \frac{\langle (-1, 3), (1, 1) \rangle}{\|(-1, 3)\| \cdot \|(1, 1)\|} = \frac{2}{\sqrt{10} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3° caso

$$y = 5x - 2$$

$$(1, 2) + t(3, 4)$$

$$(1+3t, 2+4t)$$

1° modo: tutto in cartesiana

2° modo: " " parametrica

3° modo: sostituisco la param. nella cartesiana

$$2+4t = 5(1+3t) - 2 \rightarrow \text{risolvo} \quad 2+4t = 5+15t - 2$$

$$11t = -1 \rightarrow t = -\frac{1}{11}$$

$\rightarrow$ sostituisco nella 2° e ho l'intersezione!

— o — o —

RETTE NELLO SPAZIO

Per ora le consideriamo solo in parametrica

$$w + t v$$

$\uparrow$ pto iniziale $\nwarrow$ direzione

Date due rette, queste possono essere

- ① COINCIDENTI (infinita intersezioni)
- ② INCIDENTI (intersezione unica)
- ③ PARALLELE (nessuna intersezione, direzioni una multipla dell'altra)
- ④ SGHEMBE (nessuna intersezione, direzioni non multiple)

Esempio

$$r_1: (1, 2, 3) + t(1, 0, -1)$$

$$r_2: (-1, 0, 5) + t(1, 2, -a)$$

$\uparrow$ parametro

Domanda: esiste un valore di a per cui si intersecano?

Scrivo le due parametriche con 2 parametri diversi

$$(1+t, 2, 3-t)$$

$$(-1+s, 2s, 5-as)$$

Metto a sistema

$$\begin{cases} 1+t = -1+s \\ 2 = 2s \\ 3-t = 5-as \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow s=1 \\ \searrow t=-1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ 4 = 5-a \end{matrix} \quad \leadsto \boxed{a=1}$$

Le due rette si intersecano nel caso $a=1$.

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) + t(1, 0, -1) & \quad (-1, 0, 5) + t(1, 2, -1) \\ t=-1 \leadsto (0, 2, 4) & \quad t=-1 \leadsto (0, 2, 4) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Conclusione: per $a=1$ il p.to di intersezione è $(0, 2, 4)$

Per calcolare l'angolo

$$\cos \alpha = \frac{\langle (1, 0, -1), (1, 2, -1) \rangle}{\| (1, 0, -1) \| \cdot \| (1, 2, -1) \|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

↑
angolo acuto formato
dalle 2 rette.

Esercizio Scrivere la retta per $(1, 1, 1)$ parallela alla retta
 $(5+t, -t, 2+3t)$

$$\begin{aligned} (5+t, -t, 2+3t) & \leadsto (5, 0, 2) + t(1, -1, 3) \\ (1+t, 1-t, 1+3t) & \leadsto (1, 1, 1) + t(1, -1, 3) \end{aligned}$$

Anche bene anche $(1, 1, 1) + t(-2, 2, -6)$
— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 07

Note Title

05/10/2021

PIANI NELLO SPAZIO

- forma cartesiana
- forma parametrica
- mutua posizione
- rapporti con le rette nello spazio

CARTESIANA

Piano passante per l'origine

(si intende che a, b, c non sono tutti nulli)

$$ax + by + cz = 0$$

↑ tutti i pti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che hanno prod.scalare nullo (e quindi sono $\perp$) al vettore (a, b, c) Significato geom. (a, b, c) = vettore $\perp$ al piano.

$$ax + by + cz = d$$

piano + generale, che passa per l'origine se e solo se $d = 0$ **PARAMETRICA**

Un piano in parametrica è

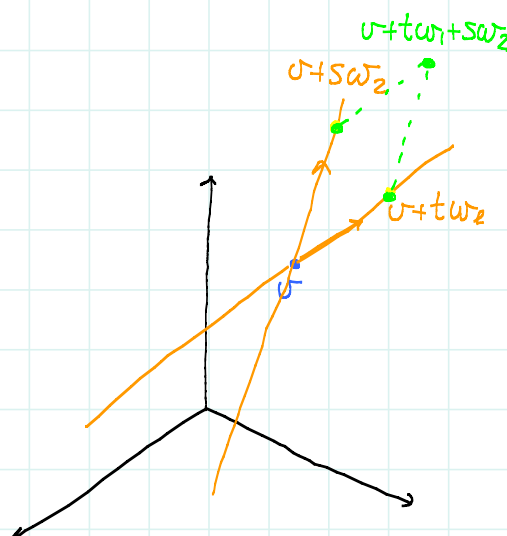
$$u + t w_1 + s w_2$$

↑
↑
due parametri reali u, w_1, w_2 sono tre vettori di $\mathbb{R}^3$ Esempio

$$(1, 0, 1) + t(2, 3, 5) + s(-1, 1, 3)$$

u w_1 w_2

"parto da u ed aggiungo una somma (calcolata con il parallelogramma) di un multiplo di w_1 ed un multiplo di w_2 ".



PASSAGGIO TRA LE FORME

1° scenario Conosco la cartesiana e voglio la parametrica

Esempio $x + y - 2z = 6$

1° modo "Risolvo il sistema", ad esempio usando y e z come variabili libere

$$z = t, \quad y = s, \quad x = 6 + 2z - y = 6 + 2t - s$$

Quindi

$$(x, y, z) = (6 + 2t - s, s, t) = \underbrace{(6, 0, 0)}_v + t \underbrace{(2, 0, 1)}_{w_1} + s \underbrace{(-1, 1, 0)}_{w_2}$$

Osserviamo che w_1 e w_2 sono $\perp$ al vettore $(1, 1, -2)$, che è il vettore (a, b, c) nella cartesiana del piano.

2° modo Trovo 3 punti P, Q, R distinti del piano, e poi scrivo

$$P + t(Q - P) + s(R - P)$$

$$x + y - 2z = 6$$

$$y = 1, z = 0 \rightsquigarrow x = 5 \rightsquigarrow P = (5, 1, 0)$$

$$y = 0, z = 1 \rightsquigarrow x = 8 \rightsquigarrow Q = (8, 0, 1)$$

$$y = 3, z = 2 \rightsquigarrow x = 7 \rightsquigarrow R = (7, 3, 2)$$

$$\underbrace{(5, 1, 0)}_v + t \underbrace{(3, -1, 1)}_{w_1} + s \underbrace{(2, 2, 2)}_{w_2}$$

3° modo Cerco a caso v che risolve $x + y - 2z = 6$ e cerco w_1 e w_2 che risolvano $x + y - 2z = 0$ ☺

2° scenario Conosco la parametrica e voglio la cartesiana

Esempio $(1, 2, -3) + t(1, 0, 4) + s(0, -1, 3)$

1° modo L'equazione sarà $ax + by + cz = d$. D'altra parte, deve essere soddisfatta da tutti i punti

$$(x, y, z) = (1+t, 2-s, -3+4t+3s)$$

Sostituisco:

$$a(1+t) + b(2-s) + c(-3+4t+3s) = d$$

$$a + at + 2b - bs - 3c + 4ct + 3cs - d = 0$$

Questa deve essere vera per ogni valore di t ed s , quindi impongo che i coeff. siano nulli

$$\begin{cases} a + 4c = 0 & \text{coeff. } t \\ -b + 3c = 0 & \text{coeff. } s \\ a + 2b - 3c - d = 0 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$$a = -4c$$

$$b = 3c$$

}

sistema di 3 equ. in 4 incognite

$$-4c + 6c - 3c - d = 0$$

$$\leadsto d = -c$$

Abbiamo un grado di libertà (c è come ci pare)

$$c = 1 \leadsto a = -4 \leadsto b = 3 \leadsto d = -1$$

$$\boxed{-4x + 3y + z + 1 = 0} \quad \text{FORMA CARTESIANA}$$

2° modo $(1, 2, -3) + t \underset{w_1}{(1, 0, 4)} + s \underset{w_2}{(0, -1, 3)}$

Sappiamo che (a, b, c) deve essere $\perp$ a w_1 e w_2

Esiste una formula che fornisce un vettore $\perp$ a due vettori dati

FORMULA MISTERIOSA

Siano dati

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

↑
cambio di
segno

Il vettore ottenuto è $\perp$ agli altri 2 !!

Morale: potevamo applicare la formula misteriosa partendo da w_1 e w_2

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (4, -3, -1) \rightsquigarrow \text{questi sono } (a, b, c) \text{ del piano}$$

$$4x - 3y - z = 1$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ (x, y, z) = (1, 2, -3) \end{matrix}$$

— o — o —

MUTUA POSIZIONE DI DUE PIANI

Due piani nello spazio possono essere

- ① COINCIDENTI (intersezione è un piano, con 2 parametri)
- ② PARALLELI (intersezione vuota)
- ③ INCIDENTI (intersezione è una retta, che dipende da un solo parametro)

e in tal caso uno vorrebbe $\rightarrow$ la retta intersezione

$\rightarrow$ l'angolo fra i 2 piani

Come calcolo l'intersezione? Passo in cartesiane, e risolvo il sistema

Come calcolo l'angolo? Vado in cartesiane, e trovo l'angolo fra i vettori (a, b, c) corrispondenti.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 08

Note Title

05/10/2021

MUTUA POSIZIONE DI UNA RETTA E UN PIANO

① RETTA CONTENUTA NEL PIANO (infinita intersezioni)

② RETTA PARALLELA AL PIANO (intersezione vuota)

③ INCIDENTI (intersezione unica)

e quando succede uno si chiede

→ chi è il p.to di inters.

→ angolo che la retta forma con il piano

Come li interseco? Scenario migliore: piano in cartesiana, retta in parametrica

Esempio 1 $2x - 3y + 5z = 4$ $(1, 0, -1) + t(2, 3, -2)$

Scrivo la retta come $(1+2t, 3t, -1-2t)$ e sostituisco nella cartesiana del piano

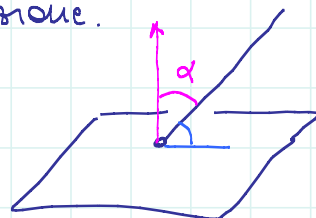
$$2 + 4t - 9t - 5 - 10t = 4 \quad \leadsto \quad 15t = -7 \quad \leadsto \quad t = -\frac{7}{15}$$

Sostituendo nella retta trovo il p.to di intersezione.

Come calcolo l'angolo?

→ Trovo l'angolo (acuto!) α tra la dir. della retta e l' (a, b, c) del piano

→ Calcolo $90^\circ - \alpha$.



$$\cos \alpha = \frac{<(2, -3, 5), (2, 3, -2)>}{\|(2, -3, 5)\| \cdot \|(2, 3, -2)\|} = -\frac{15}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{17}}$$

Essendo negativo, α è ottuso, quindi non è l' α della figura, ma il suo "supplementare". Quindi per calcolare α alla fine devo fare $180^\circ - \text{quello che è venuto}$.

— o — o —

Esercizio 2 Consideriamo

$$A = (2, 1, 0) \quad B = (1, 1, 2) \quad C = (-1, 0, 1)$$

Scrivere la cartesiana del piano che passa per A ed è $\perp$ alla retta BC.

Scrivo la retta $B + t(C - B) = (1, 1, 2) + t(-2, -1, -1)$

Se non piacciono i negativi, va bene anche

$$(1, 1, 2) + t(2, 1, 1) \quad \text{oppure} \quad (-1, 0, 1) + t(4, 2, 2)$$

Ora il piano $\perp$ alla retta sarà del tipo

$$\begin{array}{c} 2x + y + z = d \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{direzione della retta} \end{array}$$

Sostituendo A nel piano
trovo $d = 5$

$$\boxed{2x + y + z - 5 = 0}$$

Scrivere equ. cartesiana del piano che passa per A, B, C.

1° modo $ax + by + cz - d = 0 \rightsquigarrow$ sostituisco A, B, C e ottengo un sistema di 3 equ in a, b, c, d

$$\begin{cases} 2a + b - d = 0 \\ a + b + 2c - d = 0 \\ -a + c - d = 0 \end{cases}$$

2° modo Scrivo il piano in parametrica

$$A + t(B-A) + s(C-A)$$

$$(2, 1, 0) + t(-1, 0, 2) + s(-3, -1, 1)$$

Ora passo in cartesiana con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2, -5, 1)$$

Quindi il piano è $2x - 5y + z = d$

Imponendo il passaggio per A (o B o C) trovo $d = -1$

$$2x - 5y + z + 1 = 0$$

Verifica sostituendo A, B, C

Scrivere la retta che passa per A ed è $\perp$ al piano

In parametrica $(2, 1, 0) + t(2, -5, 1)$.

$\uparrow$ vettore $\perp$ al piano

— o — o —

Esercizio 3 Nel piano consideriamo la retta $ax + by + c = 0$ ed il p.to (x_0, y_0) .

Calcolare la distanza punto / retta.

Scriviamo la retta per P che è $\perp$ alla retta data

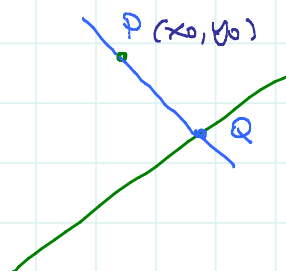
$$(x_0, y_0) + t(a, b)$$

Interseco con la retta e trovo Q

$(x_0 + at, y_0 + bt)$ $\rightsquigarrow$ sostituisco nell' eq. data

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$$

$$(a^2 + b^2)t = -(ax_0 + by_0 + c) \rightsquigarrow \text{ricavo } t \text{ e quindi } Q$$



$$\begin{aligned}
 \text{dist}(\text{punto}, \text{retta}) &= \|Q - P\| = \left\| \underbrace{(x_0, y_0) + t(a, b)}_Q - \underbrace{(x_0, y_0)}_P \right\| \\
 &= |t| \cdot \|(a, b)\| \\
 &= |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
 \end{aligned}$$

valore di t trovato sopra

Esercizio 4 Distanza di (x_0, y_0, z_0) dal piano $ax + by + cz + d = 0$.

$\downarrow$
P

Retta per P e $\perp$ al piano è $(x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$

Interseco con il piano e trovo il p.to Q di intersezione

Faccio la norma $\|Q - P\|$.

Otteniamo

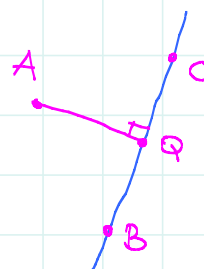
$$\text{dist}(\text{punto}, \text{piano}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Esercizio 5 Dati $A = (1, 0, 2)$

$B = (5, 1, 1)$

$C = (6, -1, 2)$

Calcolare la distanza di A dalla retta BC



1° modo scrivo la retta in parametrica

$$B + t(C - B) = (5, 1, 1) + t(1, -2, 1)$$

$$= (5+t, 1-2t, 1+t) = P$$

$$\|A - P\|^2 = (4+t)^2 + (1-2t)^2 + (-1+t)^2$$

Minimizzo questa funzione (pol. di 2° grado) [Fare il conto!]

2° modo Cerco il p.to Q della retta tale che $AQ \perp BC$

Come prima

$$AQ = (4+t, 1-2t, -1+t) \quad \text{p.to generico retta - A}$$

$$\langle (4+t, 1-2t, -1+t), (1, -2, 1) \rangle = 0$$

$$4+t-2+4t-1+t=0 \rightsquigarrow 6t=-1 \rightsquigarrow t=-\frac{1}{6}$$

Per $t = -\frac{1}{6}$ trovo il p.to Q

3° modo Scrivo il piano per A che è $\perp$ alla retta, poi interseco con la retta e ottengo Q .

Piano : $x - 2y + z = d$
 $\uparrow$ lo ottengo imponendo passaggio per A

$$d = 3 \quad x - 2y + z = 3$$

Sostituendo la retta trovo $(5-t) - 2(1-2t) + (1+t) = 3$
 $\rightsquigarrow$ trovo t .

$$\sim 0 \sim 0 \sim$$

LEZIONE 09

08/10/2021

MATRICI

$M_{m \times m}$ = insieme delle matrici $m \times m$

Esempi

Notazione: usiamo lettere minuscole per le matrici.

Per gli elementi usiamo notazione

$a_{i,j}$ $\longleftrightarrow$ $(A)_{i,j}$
elemento che nella matrice A sta
nella riga i e colonna j

Esempi con riferimento a sopra:

$$a_{1,1} = 1 = (A)_{1,1}$$

$$a_{1,2} = (A)_{1,2} = 2$$

$$b_{2,2} = (B)_{2,2} = 0$$

$$b_{3,2} = (B)_{3,2} \quad \text{NON HA SENSO}$$

$$b_{2,3} = (B)_{2,3} = 5$$

Casi speciali $\boxed{1}$ $m=n=1$ La matrice è un singolo numero

2 $n=1$ e n qualunque. La matrice si chiama

VEETTORE RIGA

$$(a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,m})$$

3) n qualunque e $m = 1$

→ VETTORI COLONNA

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

OPERAZIONI TRA MATRICI

- ① **SOMMA** Si fa termine a termine tra matrici della
STESSA DIMENSIONE

Se $A \in M_{n \times m}$ e $B \in M_{n \times m}$, allora $A+B \in M_{n \times m}$ e

$$(A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}$$

- ② **PRODOTTO MATRICE · NUMERO** (o viceversa)

Basta moltiplicare tutti i termini della matrice per il numero.

Se $A \in M_{n \times m}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda A = A \cdot \lambda \in M_{n \times m}$ e

$$(\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j}$$

- ③ **PRODOTTO TRA DUE MATRICI**

Intanto devono avere **dimensioni compatibili** del tipo

$$A \in M_{n \times k}$$

$$B \in M_{k \times m}$$

il # di colonne della prima
 è = al numero di righe
 della seconda

In questo caso si può calcolare $AB \in M_{n \times m}$ e vale

$$(AB)_{i,j} = \sum_{l=1}^k (A)_{i,l} (B)_{l,j}$$

hanno senso perché
 A ha k colonne
 B ha k righe

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

 $\in M_{2 \times 2}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

 $\in B_{2 \times 3}$

il prodotto ha senso
e sarà matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 15 & 25 \\ -3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{☹️} \quad \text{Non si può fare}$$

Proprietà del prodotto

Come ci si aspetta, il prodotto si distribuisce rispetto alla somma

$$\begin{aligned} A(B+C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A+B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{purché le dim. consentano} \\ \text{di fare i prodotti} \end{array} \right\}$$

Il prodotto è ASSOCIATIVO, cioè $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
purché le dim. siano compatibili

La dimostrazione segue da una formulaccia, del tipo

$$(ABC)_{i,j} = \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^n A_{i,s} B_{s,t} C_{t,j} \quad \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \forall j \in \{1, \dots, m\} \end{array}$$

$$A \in M_{n,k}$$

$$B \in M_{k,n}$$

$$C \in M_{n,m}$$

FATTO IMPORTANTE

In generale $A \cdot B \neq B \cdot A$, anche se si possono fare entrambi

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Oss. Le matrici $\square$ della stessa dim. si possono sempre moltiplicare, in qualunque ordine.

4 TRASPOSTA

Se $A \in M_{m \times n}$, allora la trasposta di A è la matrice $A^T \in M_{n \times m}$ ottenuta da A scambiando tra di loro righe e colonne, cioè

$$(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i} \quad [\text{Talvolta si trova indicata come } {}^T A]$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTICA

Per ogni $n \geq 1$, è la matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla "diagonale principale" e tutti 0 altrove. Si indica con I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà fondamentale Se $A \in M_{m \times n}$ (quindi quadrata)
e $I \in M_{m \times m}$ è la matrice identica,
allora

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Dim. Segue dalla formula per il prodotto. Ad esempio

$$(A \cdot I)_{i,j} = \sum_{s=1}^n (A)_{i,s} (I)_{s,j} = (A)_{i,j}$$

↑
vale sempre 0,
tranne quando $s=j$

[Notazioni sist.
mate dopo video]

$$(I \cdot A)_{i,j} = \sum_{s=1}^m (I)_{i,s} (A)_{s,j} = (A)_{i,j}$$

↑
l'unico diverso da 0
è quello con $s=i$,
che vale 1

Esercizio Cosa succede se A = vettore riga e B = vettore colonna

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Se le lunghezze sono le stesse, viene
un numero, o meglio una matrice 1×1 ,
che è una specie di prodotto scalare.
— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 10

Note Title

08/10/2021

TRASPOSTA DEL PRODOTTO

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

La trasposizione del prodotto è il prodotto delle trasposizioni in ordine scambiato

Sia $A \in M_{m \times k}$ e sia $B \in M_{k \times n}$. Quindi $A \cdot B$ ha senso $\in M_{m \times n}$

Ora $B^t \in M_{n \times k}$ e $A^t \in M_{k \times m}$. Quindi $B^t \cdot A^t$ ha senso $\in M_{n \times m}$

def. traspo.

$$\boxed{\text{Dim.}} \quad [(A \cdot B)^t]_{i,j} = (A \cdot B)_{j,i}$$

formula per prod.

$$= \sum_{s=1}^k (A)_{j,s} \cdot (B)_{s,i}$$

$$= \sum_{s=1}^k (B)_{s,i} \cdot (A)_{j,s}$$

$$= \sum_{s=1}^k (B^t)_{i,s} \cdot (A^t)_{s,j}$$

$$= (B^t \cdot A^t)_{i,j}$$

Oss. Se $A \in M_{m \times n}$ e x è un vettore colonna lungo n
 $\in M_{n \times 1}$

allora posso sempre calcolare Ax e viene un vettore colonna lungo m .

Tutti i sistemi lineari si scrivono in questa forma!

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{equazioni} \\ \text{incognite} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

In generale un sistema lineare si scrive nella forma

$$Ax = b$$

- dove
- A è una matrice $n \times m$
 - x è un vettore colonna lungo m (incognite)
 - b è " " " " n (termini noti)

Le dimensioni permettono di fare i prodotti e tornare!

Esercizio 1 Calcolare l'area del triangolo nel piano con vertici in $(1,2)$ $(3,1)$ e $(5,-2)$

A B C

1° modo Usare formula trigonometrica per l'area



$$\text{Area} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$AB = v = B - A = (2, -1)$$

$$AC = w = C - A = (4, -4)$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \quad \text{Sostituendo}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|v\| \cdot \|w\| \sqrt{1 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2}} = \frac{1}{2} \cancel{\|v\|} \cdot \cancel{\|w\|} \sqrt{\frac{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}{\cancel{\|v\|^2} \cdot \cancel{\|w\|^2}}}$$

Alla fine resta

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

dove $v = B - A$
 $w = C - A$

Questa formula in qualunque numero di variabili.

2° modo

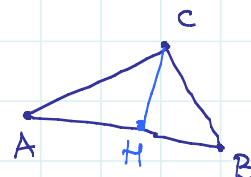
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza}$$

↑
AB

↑
CH

↑
 $\|B - A\|$

↑
distanza di C dalla retta AB



$$A = (1, 2) \quad B = (3, 1) \quad C = (5, -2)$$

$$AB = \|B - A\| = \|(2, -1)\| = \sqrt{5}$$

retta AB in parametrica : $(1, 2) + t(2, -1) = (\underbrace{1+2t}_x, \underbrace{2-t}_y)$

$$\begin{array}{l} \text{1}^{\text{a}} \\ t = 2 - y \end{array} \rightsquigarrow 1 + 2(2 - y) = x \rightsquigarrow 1 + 4 - 2y = x \rightsquigarrow \boxed{x + 2y - 5 = 0}$$

↑
retta AB in
cartesiana

$$CH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 2$$

Oss. Se uno volesse H, basta scrivere la retta per C che è $\perp$ ad AB, quindi intersecare

In parametrica sarebbe $(5, -2) + t(1, 2)$

↑ direzione $\perp$ alla retta AB.

$$= (5+t, -2+2t) \rightsquigarrow \text{sostituisco su retta AB}$$

$$(5+t) + 2(-2+2t) - 5 = 0 \rightsquigarrow \text{trovo } t.$$

— 0 — 0 —

Metodo alternativo per l'area

VALE SOLO IN $\mathbb{R}^3$

$$v = B - A$$

$$w = C - A$$

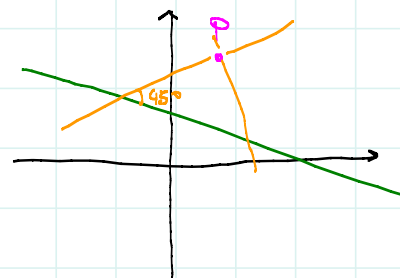
A partire da w e v applico la formula misteriosa
e trovo un vettore $\perp$ ad entrambi.
lo chiamo u . Ebbene

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|u\|^2$$

Basta fare il contaccio e vedere che $\|u\|^2 = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$

Esercizio Consideriamo la retta $x + 2y - 5 = 0$ e il p.to
 $P = (1, 3)$

Scrivere le eq. delle due rette che
passano per P e formano un angolo
di 45° con quella data



In parametrica una retta per P si scrive come $(1, 3) + t(a, b)$

La retta data la possiamo scrivere in parametrica come retta per

$$A = (5, 0) \quad B = (3, 1) \quad \text{quindi} \quad (5, 0) + t(2, -1)$$

metto $y=0$

N.B. $\uparrow$ è $\perp$ a $(1, 2)$

Noi vogliamo che l'angolo tra (a, b) e $(2, -1)$ sia di 45° ,
cioè abbia $\cos = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\langle (a, b), (2, -1) \rangle}{\sqrt{5} \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2a - b}{\sqrt{5} \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Facendo il quadrato

$$5(a^2 + b^2) = 2(2a - b)^2 = 8a^2 - 8ab + 2b^2$$

$$5a^2 + 5b^2$$

$$\text{Metto } b=1 \rightsquigarrow 5a^2 + 5 = 8a^2 - 8a + 2 \rightsquigarrow 3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16+9}}{3} = \frac{4 \pm 5}{3} \rightsquigarrow \begin{matrix} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix} \quad \text{così ottengo le parametriche delle due rette.}$$

[Soluzioni corrette dopo video].

ALGEBRA LINEARE

- LEZIONE 11

Note Title

12/10/2021

Strutture algebriche astratte

- gruppo
- gruppo commutativo
- anello
- corpo
- campo

- modulo
- spazio vettoriale

Defn (Campo) Un campo è un insieme K sul quale sono definite 2 operazioni binarie (INPUT: 2 elementi OUTPUT: 1 el.) dette somma e prodotto, con le proprietà "solite"

- (s1) $a+b = b+a$
- (s2) $(a+b)+c = a+(b+c)$
- (s3) $\exists 0 \in K$ t.c. $0+a = a+0 = a$
- (s4) $\forall a \in K \exists b \in K$ t.c. $a+b = 0$
 $\uparrow$
 $-a$

per esercizio scrivere per bene le quantificazioni

- (p1) $a \cdot b = b \cdot a$
- (p2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (p3) $\exists 1 \in K$ t.c. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$
- (p4) $\forall a \in K$ con $a \neq 0 \exists b \in K$ t.c. $a \cdot b = 1$
 $\uparrow$
 $\frac{1}{a}$

$$(d) a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Esempi di campo $\mathbb{R}$ $\uparrow$ numeri reali $\mathbb{Q}$ $\uparrow$ razionali (frazioni) $\mathbb{C}$ $\uparrow$ complessi

Non sono campi invece

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (\text{manca } (p_4) \text{ e } (s_4))$$

$$\mathbb{Z} = \text{numeri interi} \quad (\text{manca } (s_4) \text{ e } (p_4))$$

$$\mathbb{R}[x] = \text{insieme dei polinomi} \quad (\text{manca } (s_4) \text{ e } (p_4))$$

Def (SPAZIO VETTORIALE) Sia $\mathbb{K}$ un campo (per noi sarà quasi sempre $\mathbb{R}$). Uno spazio vettoriale V è un insieme più due operazioni

→ somma (INPUT: 2 el. di V OUTPUT: 1 el. di V)

→ prodotto per scalare (INPUT: 1 el. di V , 1 el. di $\mathbb{K}$
OUTPUT: 1 el. di V)

con queste proprietà

$$(s_1) \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

$$(s_2) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$(s_3) \exists \vec{0} \in V \text{ t.c. } \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall v \in V$$

$$(s_4) \forall \vec{v} \in V \exists \vec{w} \in V \text{ t.c. } \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

$\uparrow$
 $-\vec{v}$

$$(p_1) a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v} \quad \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall b \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{v} \in V$$

$$(p_2) 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$$

$$(d_1) (a+b)\vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$$

$$(d_2) a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$$

Esempi di spazio vettoriale (sempre con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

1 $V = \mathbb{R}$ con le usuali operazioni

2 $V = \mathbb{R}^d$

[3] Fissati m ed n interi positivi, $M_{m \times n}$ è uno sp. vett.

$\vec{0}$ = matrice tutta nulla

Le operazioni sono somma di matrici e prodotto di una matrice per un numero (non consideriamo il prodotto tra matrici)

[4] $\mathbb{R}[x]$ = insieme dei polinomi è uno sp. vett. rispetto alle operazioni

→ somma di 2 polinomi

→ prodotto di un pol. per un numero

Il prodotto di polinomi qui non ci interessa

[5] $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ = polinomi (a coeff. reali) di grado ≤ 3 è uno sp. vett. rispetto alle operazioni come in [4].

[6] $\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$ = polinomi di grado ≥ 3 NON è uno sp. vettoriale rispetto alle solite operazioni

Va male la somma

$$p(x) = x^4 + x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x] \quad q(x) = -x^4 + x \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$$

La loro somma $p(x) + q(x) = x^2 + x \notin \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$.

Oss. In [5] e [6] posso sostituire 3 con un intero positivo qualunque.

SOTTO SPAZI VETTORIALI

Def. Sia V uno spazio vettoriale.

Un sottospazio vettoriale è un sottoinsieme $W \subseteq V$ che è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare cioè

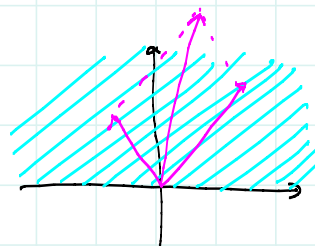
(1) per ogni $\vec{w}_1 \in W$ e $\vec{w}_2 \in W$ si ha $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

(2) per ogni $\vec{w} \in W$ e per ogni $a \in \mathbb{K}$ si ha $a\vec{w} \in W$.

Oss. Si può verificare che W , con le operazioni che "eredita" da V , è a sua volta uno sp. vett.

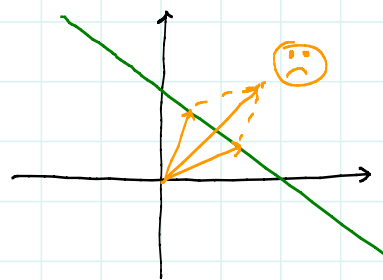
Esempio 1 $V = \mathbb{R}^2$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$



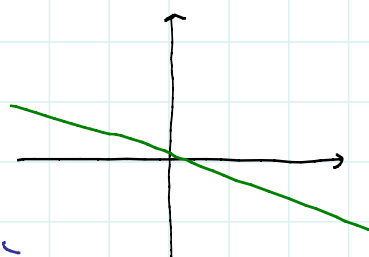
NON è un s.sp. vett. (la somma ok, ma il prodotto per neg. no)

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 12\}$$



NON è un s.sp. vett. (somma e prod. vanno male entrambi)

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$$



Strategia

→ come dimostro che un certo W NON è un sottosp. vettoriale?

Basta fare una di queste due cose

- trovare due el. in W la cui somma NON sta in W
- trovo $\vec{w} \in W$ e $a \in \mathbb{R} (= \mathbb{K})$ t.c. $a\vec{w} \notin W$

→ come dimostro che un certo W è un s.sp. vett. ?
"Devo fare una dim. generale"

Prendo (x_1, y_1) t.c. $x_1 + 2y_1 = 0$

(x_2, y_2) t.c. $x_2 + 2y_2 = 0$

La loro somma $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ verifica $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$

Stessa cosa per il prodotto. Se (x, y) verifica $x + 2y = 0$,
allora (ax, ay) verifica $(ax) + 2(ay) = 0$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 12

Note Title

12/10/2021

- vettori linearmente dipendenti e indipendenti
- SPAN
- generatori
- basi
- dimensione
- combinazioni lineari

Def. (Comb. lineari) Sia V uno spazio vettoriale. Una comb. lin. è una scrittura del tipo

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_m \vec{v}_m$$

↑ coefficienti ↑

dove $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono vettori di V e $c_1, \dots, c_m$ sono numeri di K .

Def. (SPAN) Sia V uno sp. vett., e siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ degli el. di V . Indichiamo con

$$\text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$$

l'insieme di tutte le possibili comb. lin. di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$.
(ciò che varia sono i numeri che metto davanti)

Esempio Se prendiamo un unico vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, allora
 $\text{Span}(\vec{v}) = \{c\vec{v} : c \in \mathbb{R}\}$
 è la retta per l'origine in direzione $\vec{v}$.

Se prendiamo 2 vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$, allora
 $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{a\vec{v} + b\vec{w} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$
 è il piano generato ("spannato") da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Esempio In $\mathbb{R}^3$ i vettori $(5, 1, 3)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 0, 2)$
 sono lin. dip. $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ $\vec{v}_3$

Infatti $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, quindi

$$1 \cdot \vec{v}_1 + (-1) \cdot \vec{v}_2 + (-1) \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$$

Se non lo vedeva a occhio, scrivevo

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = (5a+2b+3c, a+b, 3a+b+2c) = (0, 0, 0)$$

poi risolvevo il sistema

$$5a+2b+3c = 0$$

$$a+b = 0$$

$$3a+b+2c = 0$$

e vedeva se c'erano soluzioni oltre $a=b=c=0$.

Def. (Base) Un sottoinsieme $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ di V si dice BASE
 di V se valgono queste 2 proprietà

(1) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono lin. indip.

(2) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono generatori di V .

Esempio 1 I vettori $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ $\vec{v}_3$ $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
 sono una base di $\mathbb{R}^3$, detta BASE CANONICA.

① Sono lin. indip.? SÌ!

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = (a, b, c) = (0, 0, 0) \text{ solo se } a=b=c=0$$

② Sono generatori? SÌ!

Preso un qualunque $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$, posso trovare a, b, c
 numeri tali che $(A, B, C) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$?

Basta prendere $a=A$, $b=B$, $c=C$.

Esempio 2 3 vettori

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$$

$$\vec{v}_2 = (1, 1, 2)$$

$$\vec{v}_3 = (0, 1, -1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$?

① Sono lin. indep. ?

$$a(1, 0, 1) + b(1, 1, 2) + c(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ b+c &= 0 \\ a+2b-c &= 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \end{array} \rightsquigarrow a=b=c=0 \quad (\text{ogni colonna ha il suo PIVOT})$$

② Sono generatori ? Per ogni $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ voglio trovare a, b, c tali che

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = (A, B, C)$$

In forma di sistema diventa

$$\begin{cases} a+b = A \\ b+c = B \\ a+2b-c = C \end{cases}$$

Posso risolvere come prima, o osservare che lavorando sulla matrice troverei

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A' \\ 0 & 1 & 1 & B' \\ 0 & 0 & -2 & C' \end{array} \right)$$

$\rightsquigarrow$ questo ha soluzione (unica)
per lo stesso motivo di prima

— 0 — 0 —

Teorema Sia $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ una base di uno sp. vett. V .

Allora ogni vettore $\vec{v} \in V$ si scrive in MODO UNICO come comb. lin. di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Dim. Perché esiste un modo di scrivere un certo $\vec{v} \in V$ come comb. lin. di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$?

Perché sono generatori!

E se si potesse scrivere in 2 modi?

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n = b_1 \vec{v}_1 + \dots + b_n \vec{v}_n$$

Portando dalla stessa parte trovo

$$(a_1 - b_1) \vec{v}_1 + \dots + (a_n - b_n) \vec{v}_n = \vec{0}$$

Essendo lin. indep. per forza deve essere $a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0$
cioè

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

Esempio Una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è
 $x^3, x^2, x, 1$

Data la base il polinomio $x^3 - x^2 + 7$ lo pensano come
(1, -1, 0, 7)

↑ coeff. dell'unica comb. lin. che descrive
il pol. dato

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 13

Note Title

12/10/2021

ESISTENZA DI BASI

Def Diciamo che uno sp. vett. V ha DIMENSIONE FINITA se ammette un numero finito di generatori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$

Esempi

[1] $\mathbb{R}^3$ ha dim. finita. Un possibile insieme di generatori è
 $(1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$
 Questi sono anche una base.

[2] $M_{2 \times 3}$ ha dim. finita. Possibili generatori sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questi si verifica che sono una base (la base canonica)

[3] $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ ha dim. finita. Possibili generatori sono
 $1, x, x^2 \quad \rightsquigarrow \text{base canonica}$

Oss. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$
 $1, x, x^2, x^2+2x, x-7$ sono ancora generatori, ma di sicuro non sono lin. indep.

$\vec{v}_4 = \vec{v}_3 + 2\vec{v}_2$, quindi $0 \cdot \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 1 \cdot \vec{v}_3 - 1 \cdot \vec{v}_4 - 0 \cdot \vec{v}_5 = \vec{0}$
 la comb. lin. fa $\vec{0}$ anche se ci sono coeff. $\neq 0$.

4 $\mathbb{R}[x]$ NON ha dimensione finita

Se avesse un numero finito di generatori, questi avrebbero un grado max, e tutti i pol. di grado più alto non si potrebbero ottenere come comb. lin. di questi generatori.

Teorema (Proprietà delle basi)

Sia V uno sp. vett. di dim. finita (cioè numero finito di generatori)

Allora valgono i seguenti fatti

- ① Se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono generatori, allora posso eliminarne alcuni in modo che quelli che rimangono siano una base
(base ottenuta per eliminazione)
- ② Se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono lin. indip., allora posso aggiungere dei vettori in modo da ottenere una base
(base ottenuta per aggiunta)
- ③ Tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi.
Tale numero lo chiamiamo DIMENSIONE dello spazio.

La dimostrazione utilizza due lemmi

Lemma di eliminazione Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ elementi di V .
Supponiamo che $\vec{v}_1$ sia comb. lin. degli altri, cioè

$$\vec{v}_1 = a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_m$$

Allora $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$

(Brutalmente: $\vec{v}_1$ non aggiunge nulla di nuovo rispetto a $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$, quindi lo posso eliminare).

Lemma di sostituzione Sia v uno sp. vett.

Siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ vettori lin. indip.

Siano $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ dei generatori.

Allora

$$(1) \quad m \leq n$$

(2) Posso sostituire m dei w con gli m v ottenendo ancora dei generatori

Dim. lemma di eliminazione È ovvio che

$$\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \supseteq \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$$

(semplicemente basta mettere 0 come coeff. di $\vec{v}_1$)

La cosa non ovvia è che

$$\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \subseteq \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$$

Prendo $\vec{v}$ che sta nello span a sx

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_m \quad \text{sost. } \vec{v}_1 \text{ usando ipotesi}$$

$$= c_1 (a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_m \vec{v}_m) + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_m$$

$$= (c_1 a_2 + c_2) \vec{v}_2 + \dots + (c_1 a_m + c_m) \vec{v}_m$$

Questo mostra che $\vec{v} \in \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$

Dim Teorema

① Come ottenere la base per eliminazione. Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ dei generatori. Considero tutti i possibili sottoinsiemi. Alcuni sottoinsiemi saranno ancora generatori, altri no.

Tra tutti quelli che sono ancora generatori, scelgo quello (o uno di quelli) con il minor numero di elementi.

Dico che quelli sono una base. Generatori lo sono.

Indichiamo i rimasti con $\{\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$. Supponiamo che non siano lin. indip. Allora esistono $c_1, \dots, c_m$ non tutti nulli, tali che

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

Mettiamo $c_1 \neq 0$. Allora posso ricavare $\vec{v}_1$ in funzione degli altri

$$\vec{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \vec{v}_2 - \dots - \frac{c_m}{c_1} \vec{v}_m$$

Ma allora $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$
↑
 lemma elim.

Ma allora $\{\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ sono ancora generatori e sono meno dei precedenti!

③ Siano $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ e $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ due basi.

Allora i primi sono lin. indip. e i secondi sono generatori.

Per il lemma di sostituzione sappiamo che $m \leq n$.

Invertendo il discorso

i secondi sono lin. indip. e i primi sono generatori.

Per il lemma di sostituzione sappiamo $n \leq m$

Quindi $n = m$.

② Come ottenere una base per aggiunta

Siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ lin. indip.

Siano $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ dei generatori (esistono perché V ha dim. finita)

Posso sostituire alcuni dei w con i v in modo da avere ancora dei generatori. Poi procedo come nella parte per eliminazione. Ci torniamo all'inizio della prox. lezione.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 14

Note Title

15/10/2021

Lemma di sostituzione Sia V uno sp. vett.

Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ vett. lin. indep. in V

Siano $\{w_1, \dots, w_m\}$ generatori di V .

Allora

(1) $m \leq n$

(2) A meno di permutare i numeri, possiamo sostituire $w_1, \dots, w_m$ con $v_1, \dots, v_m$ in modo che

$$v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$$

siano ancora generatori di V .

Dim Dimostrazione per induzione su m .

Caso $m=1$ C'è solo v_1 e quindi è quasi ovvio che $1 \leq n$.

Devo mostrare che posso sostituire v_1 ad uno dei w_i .

Posso scrivere

$$v_1 = c_1 w_1 + \dots + c_m w_m \leftarrow \text{questi sono generatori}$$

Almeno uno dei c_i è $\neq 0$. Supponiamo che $c_1 \neq 0$. Allora

"posso scrivere w_1 come comb. lin. del resto"

$$w_1 = \frac{1}{c_1} (v_1 - c_2 w_2 - \dots - c_m w_m)$$

ma allora, per il lemma di eliminazione,

$$V = \text{Span}(w_1, \dots, w_m) = \text{Span}(v_1, w_1, \dots, w_m) = \text{Span}(v_1, w_2, \dots, w_m)$$

$\uparrow$ sono generatori $\uparrow$ posso eliminare v_1 $\uparrow$ posso eliminare w_1

e questo mostra che $v_1, w_2, \dots, w_m$ sono ancora generatori.

Passo induttivo: $m \Rightarrow m+1$ Supponiamo che la tesi sia vera per un certo m .

Consideriamo ora $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}$ lin. indep.

Anche il primo blocco da m è lin. indep. (perché?), quindi per ipotesi $m \leq n$ e posso sostituire ottenendo nuovi generatori

$$u_1, \dots, u_m, w_{m+1}, \dots, w_n$$

Ora voglio sostituire u_{m+1} ad uno dei w_i rimasti. Ma ce sono rimasti? Sì, altrimenti $u_1, \dots, u_m$ sarebbero generatori, quindi

$$u_{m+1} = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$$

e portando tutto a dx o sx avrei violato la lin. indep. dei u_i .

Quindi per lo meno $m+1 \leq n$.

Per fare l'ultima sostituzione, scrivo u_{m+1} come

$$u_{m+1} = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + \underbrace{a_{m+1} w_{m+1} + \dots + a_n w_n}_{\text{semplicemente "ricavando"}}$$

e osservo che per forza almeno uno degli ultimi a_i è $\neq 0$.

A meno di cambiare i numeri supponiamo che $a_{m+1} \neq 0$.

In questo caso posso scrivere w_{m+1} come comb. lin. di tutto il resto, semplicemente "ricavando".

Concludo con il lemma di eliminazione

sous gen.

$$V = \text{Span}(u_1, \dots, u_m, w_{m+1}, \dots, w_n)$$

↗ elimino u_{m+1} che è comb. lin. degli altri

$$= \text{Span}(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, w_{m+1}, \dots, w_n)$$

↘ elimino w_{m+1} che è comb. lin. degli altri.

$$= \text{Span}(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n)$$

il che completa la sostituzione.

— o — o —

Conseguenza 1 Sia V sp. vett. di dimensione finita.

Siano $v_1, \dots, v_m$ vett. lin. indip.

Allora esiste una base di V che contiene $v_1, \dots, v_m$ (base ottenuta aggiungendo)

Dim. Sappiamo già che V ammette una base $\{w_1, \dots, w_n\}$

Questi sono in particolare generatori, quindi $n \geq m$ e posso rinumerare in maniera tale che, dopo aver sostituito,

$$\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$$

siano ancora generatori, quindi una base, come stiamo per vedere.

Conseguenza 2 Sia V uno spazio vett. di dim. n .

Siano $w_1, \dots, w_m$ dei generatori. (Il loro numero è lo stesso della dimensione)

Allora per forza sono pure una base (quindi sono pure lin. indip.)

Dim. Se non fossero una base, potrei ottenere una base eliminando qualcuno, ma tutte le basi devono avere n elementi.

Conseguenza 3 Sia V uno sp. vett. di dim. n .

Siano $v_1, \dots, v_m$ vett. lin. indip. (il loro numero = dim.)

Allora sono per forza una base (e quindi pure generatori)

Dim. Se non fossero una base, potrei ottenere una base aggiungendo ulteriori elementi, ma questa base avrebbe di n elementi.

Morale Se voglio sapere se n vettori sono una base in uno sp. di dim. n , basta fare una delle 2 verifiche

→ che sono lin. indip.

→ che sono generatori.

Esempi [1] $(1,0,1)$ e $(0,3,4)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?

No! Sono troppo pochi?

[2] Sono lin. indip.?

Sì! Altrimenti sarebbero uno multiplo dell'altro, e non è vero.

Più brevemente $a(1,0,1) + b(0,3,4) = (0,0,0)$

$$a = 0$$

$$3b = 0 \quad \leadsto \quad a = b = 0 \quad \ddot{\smile}$$

$$a + 4b = 0$$

[3] Completiamoli in modo da ottenere una base

$(1,0,1)$, $(0,3,4)$, $(0,0,1)$

Saranno una base?

Essendo in numero giusto, basta verificare la lin. indip.

$$a(1,0,1) + b(0,3,4) + c(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$a = 0 \quad \leadsto \quad a = 0$$

$$3b = 0 \quad \leadsto \quad b = 0 \quad \text{☺}$$

$$a + 4b + c = 0 \quad \leadsto \quad c = 0$$

[4] Calcolare le componenti di $(1,1,1)$ rispetto a questa base.

$$a(1,0,1) + b(0,3,4) + c(0,0,1) = (1,1,1)$$

$$a = 1$$

$$3b = 1 \quad \leadsto \text{risolvo e ho finito}$$

$$a + 4b + c = 1$$

[5] $(1,0,1)$, $(0,3,4)$, $(1,3,5)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?

v_1

v_2

v_3

No, perché $v_3 = v_1 + v_2$, quindi no lin. indip. ($v_1 + v_2 - v_3 = 0$)

Esempi Consideriamo $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

① $x, x+2, x^3+1$ sono una base di V ?

No! $\dim(V) = 4$ e loro sono solo 3. Si vede anche a occhio che x^2 non è comb. lineare di loro 3.

② $x, x+2, x^3+1, x^2-3x$ sono una base di V ?

Basta verificare la lin. indep.

$$ax + b(x+2) + c(x^3+1) + d(x^2-3x) = 0$$

$\uparrow$ polinomio nullo

$$cx^3 + dx^2 + (b-3d+a)x + (c+2b) = 0$$

$$c = 0$$

$$\leadsto c = 0$$

$$d = 0$$

$$\leadsto d = 0$$

$$\leadsto a=b=c=d=0 \quad \ddot{\smile}$$

$$b-3d+a=0$$

$$c+2b=0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 15

Note Title

15/10/2021

- Somma e intersezione di sottospazi
- Somma diretta
- Formula di GRASSMANN

Setting: sia X uno sp. vett.

Siano V e W due sottosp. vettoriali

Def. Si dice somma di V e W e' insieme

$$V + W = \{ v + w \in X : v \in V \text{ e } w \in W \}$$

Def. Ovviamente $V \cap W = \{ x \in X : x \in V \text{ e } x \in W \}$

Prop. $V \cap W$ e $V + W$ sono s.sp. vett. di X .

Dim Nel caso di $V \cap W$ è quasi ovvio.

Facciamolo nel caso della somma. Ci sono due verifiche

- La somma di 2 el. resta nello stesso insieme

$$\begin{array}{l} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{array}} \right\} \text{La loro somma è } v_1 + w_1 + v_2 + w_2 \\ = \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in V + W$$

- Il prodotto di un elemento per un numero resta nello stesso insieme. Sia $v + w \in V + W$, sia $\alpha \in K (\mathbb{R})$.

Allora

$$\alpha(v + w) = \underbrace{\alpha v}_V + \underbrace{\alpha w}_W \in V + W$$

Siano $u_1, \dots, u_k$ una base di $V \cap W$

Siano $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m$ una base di V

Siano $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m$ una base di W

Dico che $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m$ sono una base di $V+W$. (NB: sono in numero giusto)

• Sono generatori

$$\underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{w}_{\in W} = (a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_m v_m) + (c_1 u_1 + \dots + c_k u_k + d_1 w_1 + \dots + d_m w_m)$$

= comb. lin. dei $k+m+m$ vettori che volevo

• Sono lin. indep. Prendiamo una comb. lin. nulla

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_m v_m + c_1 w_1 + \dots + c_m w_m = 0$$

Porto le w a destra

$$\underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_m v_m}_{\in V} = \underbrace{-c_1 w_1 - \dots - c_m w_m}_{\in W} \quad (*)$$

Quindi entrambi stanno nell'intersezione. Ma allora

$$-c_1 w_1 - \dots - c_m w_m = \underbrace{d_1 u_1 + \dots + d_k u_k}_{\text{elem. generico dell'intersezione}}$$

Quella che ho scritto, portando tutto dalla stessa parte, diventa una comb. lin. nulla degli el. della base di W . Quindi tutti i coeff. sono nulli, in particolare $c_1 = \dots = c_m = 0$.

Ora in (*) a destra abbiamo 0, quindi a sx c'è una comb. lin. nulla degli elementi di una base di V , quindi $a_1 = \dots = a_k = 0$ e $b_1 = \dots = b_m = 0$.

Esercizio 1 Come sono fatti tutti i s.sp. vett. di $\mathbb{R}$?

Ce ne sono solo 2: $\rightarrow$ solo $\{0\}$

$\rightarrow$ tutto $\mathbb{R}$ (appena un s.sp. contiene un elemento $\neq 0$, contiene tutti i suoi multipli, quindi tutto $\mathbb{R}$)

Esercizio 2 Come sono fatti tutti i s.sp. vett. di $\mathbb{R}^2$?

Ce ne sono di 3 tipi: $\rightarrow$ solo $\{0\}$

$\rightarrow$ tutte le rette che passano per 0.

$\rightarrow$ tutto $\mathbb{R}^2$

Appena contiene un vettore non nullo, contiene tutti i suoi multipli (retta per l'origine). Se contiene 2 vett. lin. indip., allora è tutto $\mathbb{R}^2$ (in $\mathbb{R}^2$ ogni 2 vett. lin. indip. sono una base).

Esercizio 3 Come sono fatti tutti i s.sp. vett. di $\mathbb{R}^3$?

Quattro tipi: $\rightarrow$ solo $\{0\}$

dim 0

$\rightarrow$ rette per l'origine

dim 1

$\rightarrow$ piani per l'origine

dim 2

$\rightarrow$ tutto $\mathbb{R}^3$

dim 3

Siano V e W due s.sp. di dim 1 in $\mathbb{R}^3$, cioè due rette per l'origine. Supponiamo $V \cap W = \{0\}$, cioè che si intersecano solo nell'origine. Chi è $V+W$?

È tutto il piano per l'origine che contiene le 2 rette.

Inoltre la somma è diretta.

$$\underset{2}{\dim(V+W)} + \underset{0}{\dim(V \cap W)} = \underset{1}{\dim V} + \underset{1}{\dim W}$$

Esercizio 4 Siano V e W due piani in $\mathbb{R}^3$.
Quanto può valere $\dim(V \cap W)$?

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(V+W) & + & \dim(V \cap W) & = & \dim V & + & \dim W \\ 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\ 3 & & 1 & & & & \end{array}$$

Nella prima riga i 2 piani coincidono, sia tra di loro, sia con la loro somma e intersezione.

Nella seconda riga, i due piani si intersecano in una retta, e la loro somma è tutto $\mathbb{R}^3$.

La somma di 2 piani in $\mathbb{R}^3$ non può essere diretta.

Esempio 5 Sia V un s.sp. di dim 17 di $\mathbb{R}^{25}$
Sia W un s.sp. di dim. 15 di $\mathbb{R}^{25}$.
Quanto vale come minimo $\dim(V \cap W)$?

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(V+W) & + & \dim(V \cap W) & = & \dim V & + & \dim W \\ 17 & & 15 & & 17 & & 15 \\ 18 & & \vdots & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ 25 & & 7 & & & & \end{array}$$

La prima riga dice che $W \subseteq V$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 16

Note Title

19/10/2021

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Siano V e W sp. vett. Un'applicazione lineare è una funzione $f: V \rightarrow W$ con queste due proprietà

$$(i) \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{per ogni } v_1 \in V \text{ e ogni } v_2 \in V$$

$$(ii) \quad f(av) = a f(v) \quad \text{per ogni } v \in V \text{ e ogni } a \in \mathbb{K}.$$

Oss. Nella (i) il $+$ a sx è la somma in V , quello a dx è la somma in W

Stessa cosa per il prodotto nella (ii).

Esempio classico a cui pensare: la derivata è un'applic. lineare, cioè
 $\rightarrow$ la derivata della somma è la somma delle derivate
 $\rightarrow$ "le costanti escono fuori"

Oss. Se f è lineare, allora "le combinazioni lineari escono fuori", cioè

$$f(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = c_1 f(v_1) + \dots + c_m f(v_m)$$

Usando la (i) n volte e poi la (ii) otteniamo

$$\begin{aligned} f(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) &\stackrel{(i)}{=} f(c_1 v_1) + \dots + f(c_m v_m) \\ &\stackrel{(ii)}{=} c_1 f(v_1) + \dots + c_m f(v_m). \end{aligned}$$

Teorema di struttura Siano V e W sp. vett. di dim. finita.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Siano $\{w_1, \dots, w_n\}$ vettori qualunque di W (sono tanti quanti la dim. di V)

Allora esiste un'unica applic. lin. $f: V \rightarrow W$ tale che

$$f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Brutalmente: posso mandare una base dove mi pare e questo mi determina univocamente l'applicazione.

Dim. Dove va a finire un qualunque $v \in V$?

Scrivo $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ (passo in modo unico perché sono base) e pongo

$$f(v) = c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n.$$

In questo modo definisco $f(v)$ per ogni $v \in V$.

Sono sicuro che sia lineare? Due verifiche.

• Somma $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \in V$

$$\hat{v} = \hat{c}_1 v_1 + \dots + \hat{c}_n v_n \in V$$

$$v + \hat{v} = (c_1 + \hat{c}_1) v_1 + \dots + (c_n + \hat{c}_n) v_n$$

Applico la def.

$$f(v) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$$

$$f(\hat{v}) = \hat{c}_1 w_1 + \dots + \hat{c}_n w_n$$

$$f(v + \hat{v}) = (c_1 + \hat{c}_1) w_1 + \dots + (c_n + \hat{c}_n) w_n$$

Da queste formule segue che $f(v + \hat{v}) = f(v) + f(\hat{v})$.

• Prodotto per costante

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$av = \underline{ac_1} v_1 + \dots + \underline{ac_n} v_n$$

$$f(v) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$$

$$f(av) = ac_1 w_1 + \dots + ac_n w_n$$

Da queste due formule segue che

$$f(av) = a f(v)$$

— o — o —

Esempio 1 Come sono fatte tutte le applic. lin. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Chiamo $a = f(1)$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ avremo che

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax$$

Quindi sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = ax$

Esempio 2 Stessa cosa con $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

Chiamo $a = f(1,0)$ e $b = f(0,1)$. A questo punto

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= x f(1,0) + y f(0,1) \\ &= ax + by \end{aligned}$$

$$f(x,y) = ax + by$$

Esempio 3 Dimostrare che esiste un'unica $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che $f(1,1) = (2,3,4)$ e $f(1,2) = (7,0,2)$. Calcolare quindi $f(2,3)$.

Osservo che $(1,1)$ e $(1,2)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ (spazio di partenza) (sono in numero giusto e sono lin. indip.)

Il teorema di struttura dice che possiamo mandare una base dove ci pare.

Come calcolo $f(2,3)$? lo scrivo come comb. lin. degli el. della base

$$(2,3) = (1,1) + (1,2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(2,3) &= f((1,1) + (1,2)) = f(1,1) + f(1,2) \\ &= (2,3,4) + (7,0,2) = (9,3,6). \end{aligned}$$

Se avessi chiesto $f(5,14)$, dovevo risolvere

$$(5,14) = a(1,1) + b(1,2) \text{ e poi calcolare}$$

$$f(5,14) = a(2,3,4) + b(7,0,2)$$

— o — o —

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Siano V e W sp. vett. di dim. finita.

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V .

Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base di W .

Sia $f: V \rightarrow W$ un'applic. lineare.

Costruiamo una matrice $A \in M_{m \times n}$ (# righe = dim. sp. arrivo
colonne = dim. sp. partenza)

$$\text{Prendendo } f(v_1) = \boxed{a_{1,1}} w_1 + \boxed{a_{2,1}} w_2 + \dots + \boxed{a_{m,1}} w_m$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 prima colonna della matrice A

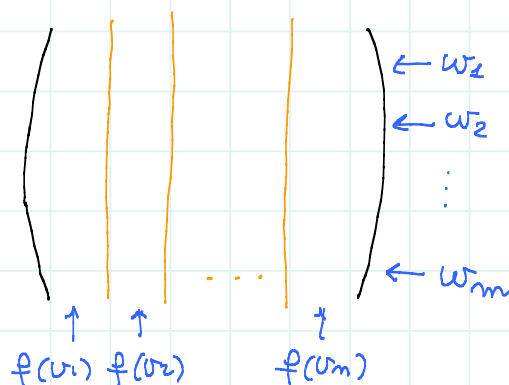
$$\text{Prendendo } f(v_2) = \boxed{a_{1,2}} w_1 + \boxed{a_{2,2}} w_2 + \dots + \boxed{a_{m,2}} w_m$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 seconda colonna della matrice A

$\vdots$

Proseguiamo allo stesso modo fino a $f(v_m)$, i cui coeff. andranno nell'ultima colonna.

BATTAGLIA NAVALE



Oss. Se cambio le basi in partenza ed arrivo, la matrice cambia.

Esempio Consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da
 $f(x, y) = (2x+y, x+3y)$

Calcolare $f(2, 1) = (5, 5)$ (basta sostituire)

Scrivere la matrice di f usando in partenza ed arrivo la base

$$\{(1, 1), (0, 1)\} \leftarrow \text{base di } \mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ w_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} v_2 \\ w_2 \end{array}$$

$$f(v_1) = (3, 4) = \boxed{3} w_1 + \boxed{1} w_2$$

$\uparrow$ uso formula $\uparrow$ 1ª colonna $\uparrow$

$$f(v_2) = (1, 3) = \boxed{1} w_1 + \boxed{2} w_2$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 2ª colonna

La matrice è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow w_1 \\ \rightarrow w_2 \end{array}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $f(v_1)$ $f(v_2)$

Se cambiamo la base in partenza e/o in arrivo, cambia la matrice.
 Ad esempio, se usavo $(1, 0), (0, 1)$ in partenza ed arrivo

$$f(1, 0) = (2, 1) = \boxed{2}(1, 0) + \boxed{1}(0, 1) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(0, 1) = (1, 3) = \boxed{1}(1, 0) + \boxed{3}(0, 1)$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 17

Note Title

19/10/2021

Esempio ① Dimostrare che esiste un'unica $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che

$$f(1,1,0) = (2,1)$$

$$f(0,1,0) = (0,3)$$

$$f(0,2,1) = (1,-1)$$

② Calcolare $f(1,1,1)$

③ Scrivere la matrice associata ad f usando in partenza ed arrivo le basi canoniche

④ Scrivere la stessa matrice usando le basi

$$\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \quad \{(1,1), (1,-1)\}$$

Per il punto ① basta dimostrare che i vettori in cui ho assegnato f sono una base di $\mathbb{R}^3$. Essendo in numero giusto, basta verificare che sono lin. indep.

$$a(1,1,0) + b(0,1,0) + c(0,2,1) = (0,0,0)$$

$$(a, a+b+2c, c) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a = 0 & 1^a \text{ eq} \Rightarrow a=0 \\ a+b+2c=0 & 3^a \text{ eq} \Rightarrow c=0 \\ c = 0 & 2^a \text{ eq} \Rightarrow b=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Le colonne sono
i 3 vettori dati

Sono una base. Per il teo. di struttura f esiste ed è unica.

② Come calcolo $f(1,1,1)$? Lo scrivo come comb. lin. dei 3 vettori dati (stesso sistema di prima con $= (1,1,1)$)

$$\begin{cases} a = 1 & a=1 \\ a+b+2c = 1 & b=-2 \\ c = 1 & c=1 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= 1 \cdot f(1,1,0) - 2 f(0,1,0) + 1 \cdot f(0,2,1) \\ &= (2,1) - 2(0,3) + (1,-1) = (3,-6) \end{aligned}$$

③ Devo calcolare con un po' di pazienza

$$f(1,0,0) = f(1,1,0) - f(0,1,0) = (2,1) - (0,3) = (2,-2)$$

$$f(0,1,0) = (0,3) \quad \leftarrow \text{dato all'inizio}$$

$$f(0,0,1) = f(0,2,1) - 2 f(0,1,0) = (1,-1) - 2(0,3) = (1,-7)$$

Dal momento che anche in arrivo abbiamo la base canonica

$$f(1,0,0) = (2,-2) = \boxed{2}(1,0) + \boxed{-2}(0,1)$$

$$f(0,1,0) = (0,3) = \boxed{0}(1,0) + \boxed{3}(0,1)$$

$$f(0,0,1) = (1,-7) = \boxed{1}(1,0) + \boxed{-7}(0,1)$$

I sei numeri ottenuti sono le colonne della matrice richiesta

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{-2} & \boxed{3} & \boxed{-7} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{dim. sp. arrivo} \\ \leftarrow \text{dim. sp. partenza} \end{array}$$

Back to ②. Calcoliamo in altro modo $f(1,1,1)$.

Basta moltiplicare la matrice per il vettore

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

④ Ora devo usare le basi

$$\begin{array}{ccccc} \{ (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) \} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \{ (1,1), (1,-1) \} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ w_1 \quad w_2 \end{array}$$

$$f(v_1) = f(1,0,0) = (2,-2) = \boxed{0} w_1 + \boxed{2} w_2$$

↑
prima

$$\begin{aligned} f(v_2) &= f(1,1,0) = f(1,0,0) + f(0,1,0) \\ &= (2,-2) + (0,3) \\ &= (2,1) = a(1,1) + b(1,-1) = \boxed{\frac{3}{2}} w_1 + \boxed{\frac{1}{2}} w_2 \end{aligned}$$

Questo mi porta al sistema

$$\begin{aligned} a+b &= 2 & \text{sommando: } 2a &= 3 & \leadsto a &= \frac{3}{2} \\ a-b &= 1 & & & \leadsto b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_3) &= f(1,1,1) = f(1,1,0) + f(0,0,1) \\ &= (2,1) + (1,-7) \\ &= (3,-6) = a(1,1) + b(1,-1) = \boxed{-\frac{3}{2}} w_1 + \boxed{\frac{9}{2}} w_2 \end{aligned}$$

Da cui il sistema

$$\begin{aligned} a+b &= 3 & \text{sommando: } 2a &= -3 & \leadsto a &= -\frac{3}{2} \\ a-b &= -6 & & & \leadsto b &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Quindi la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

↑ ↑ ↑
 $f(v_1)$ $f(v_2)$ $f(v_3)$

FILOSOFIA GENERALE

- Quando in uno sp. vett. fissiamo una base, i vettori diventano numeri
- Quando fissiamo basi in partenza ed arrivo, le applic. lineari diventano MATRICI
- A quel punto possiamo calcolare le applic. usando le matrici

$$f(v) = w$$

$$A x = y \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{comp. di } f(v) \text{ rispetto ad una} \\ \text{base di } W \end{array}$$

↑
matrice di f ↑ comp. di v rispetto ad una base di V ↑ quelle usate per costruire A .

MATRICE DI CAMBIO DI BASE

Sia V uno sp. vett. di dim. finita n .

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Sia $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ un'altra base di V .

Se di un vettore v conosco le componenti rispetto alla prima base, come calcolo le componenti rispetto alla seconda base?

Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $\{ \underset{v_1}{(1,1)}, \underset{v_2}{(0,1)} \}$ $\{ \underset{\hat{v}_1}{(2,1)}, \underset{\hat{v}_2}{(-1,1)} \}$

Se v ha componenti $(3,4)$ rispetto alla prima base, allora

$$v = 3v_1 + 4v_2 = (3,7) = a(2,1) + b(-1,1)$$

Risolvendo trovo a e b e quelle sono le comp. risp. seconda base.

Matrice di cambio di base

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \hat{v}_1 \\ \leftarrow \hat{v}_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow v_1 & \uparrow v_2 \end{matrix}$

Scrivo v_1 usando la seconda base: le componenti sono la 1^a colonna

Scrivo v_2 usando la seconda base: le componenti sono la 2^a colonna

$$(1,1) = a(2,1) + b(-1,1)$$

$$2a - b = 1$$

$$a + b = 1$$

Sommando $a = \boxed{\frac{2}{3}}$
 $b = \boxed{\frac{1}{3}}$

$$(0,1) = a(2,1) + b(-1,1)$$

$$2a - b = 0$$

$$a + b = 1$$

sommando $a = \boxed{\frac{1}{3}}$
 $b = \boxed{\frac{2}{3}}$

La matrice di cambio di base è $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = M$

Qual è l'utilità di M ?

M prende in INPUT componenti rispetto alla prima base
e restituisce in OUTPUT " " " seconda base

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Consideriamo $5 \cdot U_1 + 1 \cdot U_2 = (5, 6)$

Consideriamo $\frac{11}{3} \hat{U}_1 + \frac{7}{3} \hat{U}_2 = \frac{11}{3} (2, 1) + \frac{7}{3} (-1, 1) = (5, 6)$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 18

Note Title

19/10/2021

KER E IMMAGINE

Def. Siano V e W sp. vett., e sia $f: V \rightarrow W$ lineare

- Si definisce $\text{Ker}(f)$ (*kernel, nucleo*) l'insieme

$$\text{ker}(f) = \{v \in V : f(v) = \overset{\text{di } W}{0}\} \subseteq V$$

- Si definisce $\text{Im}(f)$ (*immagine*) l'insieme

$$\text{Im}(f) = \{f(v) : v \in V\} \subseteq W$$

Prop. Nelle ipotesi di sopra

- $\text{Ker}(f)$ è un s.sp. vett. di V
- $\text{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W .

Dim per $\text{ker}(f)$

- Somma. Se $v_1 \in \text{ker}(f)$ e $v_2 \in \text{ker}(f)$, allora

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$$

$$\leadsto v_1 + v_2 \in \text{ker}(f)$$

- Prodotto per un numero. Se $v \in \text{ker}(f)$ e $a \in \mathbb{K}$, allora

$$f(av) = a f(v) = a \cdot 0 = 0 \quad \leadsto av \in \text{ker}(f)$$

Dim per $\text{Im}(f)$ Siano $w_1 \in \text{Im}(f)$ e $w_2 \in \text{Im}(f)$, cioè

$$w_1 = f(v_1) \text{ e } w_2 = f(v_2). \text{ Allora } w_1 + w_2 = f(v_1 + v_2) \in \text{Im}(f)$$

Analogamente

$$a f(v) = f(av) \in \text{Im}(f)$$

— o — o —

KER E INIETTIVITÀ $f: V \rightarrow W$ è iniettiva $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

Dim. $\Rightarrow$ Se f è iniettiva, allora $f(0) = 0$ e non ci sono altri $v \in V$ t.c. $f(v) = 0$.

$$[\underset{\substack{\uparrow \\ \in V}}{f(0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \in K}}{f(0 \cdot v)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \in K}}{0 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \in W}}{f(v)}} = 0]$$

$\Leftarrow$ Supponiamo che $v_1 \in V$ e $v_2 \in V$ e $f(v_1) = f(v_2)$.

Allora per linearità

$$f(v_1 - v_2) = 0$$

Ma allora $v_1 - v_2 \in \ker(f)$.

Se $\ker(f) = \{0\}$, allora $v_1 - v_2 = 0$, cioè $v_1 = v_2$, cioè non abbiamo violazioni di iniettività.

IMMAGINE E SURGETTIVITÀ f è surgettiva $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = W$

Sostanzialmente è la definizione di funzione surgettiva.

— 0 — 0 —

Teorema (RANK-NULLITY) Sia $f: V \rightarrow W$ lineare, con V e W sp. vett. di dim. finita.

Allora

sp. di partenza

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim V$$

Dim. Indichiamo con n la dimensione di V , e con k la dimensione di $\ker(f)$.

Ovviamente $k \leq n$ perché $\ker(f) \subseteq V$.

Prendiamo $\{v_1, \dots, v_k\}$ base di $\ker(f)$.

Questi sono lin. indip. in V , quindi posso completarli ad una base di V aggiungendo $n-k$ vettori

$$v_{k+1}, \dots, v_n$$

Claim: $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)\}$ sono una base di $\text{Im}(f)$.

Se lo faccio ho finito perché avrei

$$k + (m-k) = n$$

- Sono generatori Ogni elemento $w \in \text{Im}(f)$ si scrive come

$$w = f(v) = f(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m)$$

$\uparrow$
base di V

$$= c_1 \underbrace{f(v_1)}_0 + \dots + c_k \underbrace{f(v_k)}_0 + c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_m f(v_m)$$

$\Rightarrow w$ è comb. lineare degli el. $f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)$.

- Sono lin. indep. Scriviamo una loro comb. lin. nulla

$$a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_m f(v_m) = 0$$

"

$$f(a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_m v_m) = 0$$

$\Rightarrow a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_m v_m \in \text{Ker}(f)$, ma allora

$$a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_m v_m = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

$\uparrow$ base del $\text{Ker}(f)$

Se porto tutto a sx, ottengo una comb. lin. di $v_k, \dots, v_m$ che fa 0, ma essendo una base di V tutti i coeff. sono nulli, ed in particolare sono nulli quelli che volevo

$$a_{k+1} = \dots = a_m = 0.$$

— 0 — 0 —

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim V$$

Conseguenza 1 Supponiamo $\dim V > \dim W$.

Allora φ **NON PUÒ ESSERE INIETTIVA**

Dim Se fosse iniettiva, allora $\ker(\varphi) = \{0\}$, quindi $\dim \ker = 0$, quindi

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \leq \dim W < \dim V$$

$\uparrow$ $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq W$ $\uparrow$ ipotesi

$\uparrow$ [Conetto dopo video 2]

Conseguenza 2 Supponiamo $\dim V < \dim W$

Allora φ **NON PUÒ ESSERE SURGETTIVA**

Dim Se fosse surgettiva, allora $\operatorname{Im}(\varphi) = W$, quindi $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim W$ e allora

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) \\ &= \dim W + \dim(\ker(\varphi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim(\ker) &\geq 0 \\ &\geq \dim W \\ &> \dim V \end{aligned}$$

$\uparrow$ ipotesi

e questo è assurdo

Conseguenza 3 Se $\dim(V) = \dim(W)$, allora

φ è INIETTIVA $\Leftrightarrow \varphi$ è SURGETTIVA

Dim $\Rightarrow$ Se φ è iniettiva, allora $\dim(\ker(\varphi)) = 0$, quindi

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim V = \dim W$$

$\uparrow$ rank-nullity $\uparrow$ ipotesi

Quindi $\text{Im}(f)$ è un s.sp. di W che ha la stessa dim. di W , quindi $\text{Im}(f) = W$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se f è surgettiva, allora $\text{Im}(f) = W$ e nel teorema

$$\begin{array}{ccc} \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) & = & \dim V \\ \text{coincide con} \rightarrow & & \parallel \text{ (per ipotesi)} \\ \dim W & & \dim W \end{array}$$

Ma allora $\dim(\ker(f)) = 0 \leadsto \ker(f) = \{0\}$
 $\leadsto f$ è iniettiva.

— o — o —

Esempio 1 Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,1) = (2,3) \quad \text{e} \quad f(4,5) = (6,7)$$

È iniettiva? È surgettiva?

Intanto esiste ed è unica (to. struttura + $\{(1,1), (4,5)\}$ base)
 L'immagine di f contiene almeno i vettori $(2,3)$ e $(6,7)$.
 Questi sono lin. indep., quindi per forza $\dim(\text{Im}(f)) \geq 2$,
 ma più di 2 non può essere. Dunque $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ e f è
 surgettiva. Le dim. in partenza ed arrivo sono uguali, quindi è
 pure iniettiva.

Esempio 2 Se $f: \mathbb{R}^{20} \rightarrow \mathbb{R}^{13}$, quanto può valere $\dim(\ker(f))$?

$$\begin{array}{ccc} \dim(\ker) + \dim(\text{Im}) & = & 20 \\ & \uparrow & \\ & \text{da } 0 \text{ a } 13 & \end{array}$$

Quindi $7 \leq \dim(\ker) \leq 20$. Fare esempi in cui si
 realizzano i casi intermedi

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

— LEZIONE 19

Note Title

22/10/2021

Sistemi lineari Interpretazione con le matrici
 colonna lunga n

$$A x = b$$

matrice $m \times n$ equ. $\uparrow$ inc. $\uparrow$ colonna lunga m

Il sistema è omogeneo quando $b=0$.

Esempio

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \\ 7x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{Sistema OMogeneo}$$

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1ª interpretazione Stiamo cercando una comb. lin. delle colonne della matrice dei coeff. che faccia 0.

→ La soluzione $x=y=z=0$ c'è sempre

→ Ci sono altre soluzioni se e solo se le colonne sono LIN. DIPEND.

Se il sistema è NON OMOG., allora stiamo cercando di scrivere la colonna dei termini noti come comb. lin. delle colonne dei coeff., quindi ci riusciamo se e solo se la colonna dei termini noti è nello span delle colonne dei coeff.

2ª interpretazione Pensiamo alle 3 equ. del sistema come una applic. lineare $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

In questa luce

→ risolvere il sistema omogeneo vuol dire trovare $\text{Ker}(L)$.

Sappiamo che il Ker è uno sp. vettoriale, quindi i suoi elementi sono comb. lineari dei vettori di una base.

I parametri da cui la soluz. dipende sono i coeff. di questa combinazione.

→ Risolvere un sistema non omogeneo vuol dire trovare i vettori (x, y, z) nello spazio di partenza che vengono mandati da L nel vettore b dei termini noti.

Questo è possibile se e solo $b \in \text{Im}(L)$.

Oss. Consideriamo un sistema non omogeneo $n \times n$ (quadrato)
Una applic. $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare è iniettiva $\Leftrightarrow$ è surgettiva
Questo dice che

il sistema ha soluzione per ogni scelta dei termini noti b

$\Leftrightarrow$ il sistema con $b=0$ ha come unica soluzione quella con tutti 0

$\Leftrightarrow$ la matrice dei coeff. lavorata alla Gauss diventa una scala con un Pivot in ogni riga e colonna.

— 0 — 0 —

Struttura generale delle soluzioni di un sistema

Consideriamo un sistema generale $Ax = b$.

La soluzione generale si presenta nella forma

$$x = x_0 + c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

↑
soluzione
qualunque del
sistema dato
 $Ax = b$

↑
 k parametri liberi

↑
vettori che costituiscono una base
delle soluz. del consp. sistema omogeneo
 $Ax = 0$

Dim. Ci sono due cose da dimostrare.

1^a cosa Se x_0 risolve il sistema NON omogeneo e v risolve quello omogeneo, allora $x_0 + v$ risolve quello NON omog.

$$Ax_0 = b$$

$$Av = 0$$

$$\text{Sommando } A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b$$

2^a cosa Se x_0 e x risolvono entrambi il sistema NON omog., allora $x_0 - x$ risolve quello omogeneo

$$Ax_0 = b$$

$$Ax = b$$

$$\text{Facendo la diff. } \therefore A(x_0 - x) = b - b = 0.$$

Esempio

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ 3x \quad + 2z = a \end{cases}$$

Studiare, al variare di a , le soluzioni del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & a \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{2R_2 \leftarrow R_1 \\ 2R_3 \leftarrow 3R_1}]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2a-6 \end{array} \right)$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-10 \end{array} \right)$$

MANCA UN
PIVOT

Se $2a-10 \neq 0$, cioè se $a \neq 5$, allora NON CI SONO SOLUZIONI.

Se $a = 5$, allora restano solo le prime 2 equ., e la z la possiamo usare come variabile libera

$$z = t, \quad 3y + z = 4, \quad 3y = 4 - t \rightsquigarrow y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t$$

$$2x - y + z = 2 \rightsquigarrow 2x = 2 + y - z = 2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t - t = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}t$$

Soluz. generale

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t, \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t, t \right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0 \right)}_{x_0} + t \underbrace{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right)}_{\substack{\text{param.} \\ \text{libero}}} \quad \uparrow v_1$$

Ora x_0 deve risolvere il sistema non omogeneo $Ax_0 = b \rightarrow \text{VERIFICA}$

v_1 deve risolvere il sistema OMOGENEO $Av_1 = 0 \rightarrow \text{VERIFICA}$

Oss. Posso permettermi di levare le frazioni su v_1 e scrivere la soluzione come

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0 \right) + t (-2, -1, 3)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0 \right)}_{\uparrow} + t (2, 1, -3)$$

Questo NON si
può cambiare, o per lo
meno non lo posso
moltiplicare per dei numeri

$\uparrow$ continua a risolvere
 $Av = 0$

Esempio

$$x + 2y - 3z = 5$$

$$\textcircled{1} \quad 2 \quad -3 \quad | \quad 5$$

Posso usare y e z come variabili libere.

$$z = t, \quad y = s, \quad x = 5 - 2y + 3z = 5 - 2s + 3t$$

Soluzione generale:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (5 - 2s + 3t, s, t) \\ &= (5, 0, 0) + t(3, 0, 1) + s(-2, 1, 0) \end{aligned}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_0 & v_1 & v_2 \\ \uparrow & & \\ Ax_0 = b & Av_1 = 0 & Av_2 = 0 \end{array}$

Altro modo corretto

$$(x, y, z) = (0, 1, -1) + t(2, -1, 0) + s(1, 1, 1)$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ Ax_0 = b & Av_1 = 0 & Av_2 = 0 \\ & (\text{è il vecchio } v_2 \text{ cambiato di segno}) & (\text{è la somma dei vecchi } v_1 \text{ e } v_2) \end{array}$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 20

Note Title

22/10/2021

SOTTO SPAZI VETTORIALI

Due possibili descrizioni

→ con equazioni

→ come Span di opportuni vettori

Esempio 1 $V = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w, x-3w=0 \} \subseteq \mathbb{R}^4$

↑
se invece di 0
ci fosse stato 10,
non era un
S.sp.

Verifica che si tratta di un sottospazio

- Somma $(x_1, y_1, z_1, w_1) \in V$
 $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in V$

È vero che la loro somma sta in V ?

$$x_1 + y_1 = z_1 + w_1$$

$$x_1 - 3w_1 = 0$$

$$x_2 + y_2 = z_2 + w_2$$

$$x_2 - 3w_2 = 0$$

Basta sommare

$$(x_1 + x_2) - 3(w_1 + w_2) = 0$$

- Prodotto $(x, y, z, w) \in V \Rightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w) \in V$

Anche qui basta moltip. le equazioni per α .Voglio trovare una base di V . Risolvo il sistema!

$$\begin{cases} x + y - z - w = 0 \\ x - 3w = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Le variabili z e w sono libere

$$w = t, \quad z = s, \quad -y + z - 2w = 0 \leadsto y = z - 2w = s - 2t$$

$$x = -y + z + w = -s + 2t + s + t = 3t$$

$$(x, y, z, w) = (3t, s - 2t, s, t) = t(3, -2, 0, 1) + s(0, 1, 1, 0)$$

↑
VERIFICA!
↑

Quindi posso dire che

$$V = \text{Span} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ v_1}}{(3, -2, 0, 1)}, \underset{\substack{\uparrow \\ v_2}}{(0, 1, 1, 0)} \right\} \xrightarrow{\text{liu. indep.}} \dim V = 2$$

Esempio 2 Sia $W = \text{Span} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ w_1}}{(1, 1, 1, 1)}, \underset{\substack{\uparrow \\ w_2}}{(3, 0, 2, 1)} \right\}$

liu. indep.

$$\dim W = 2$$

Calcolare $W+V$ e $W \cap V$, dove V è quello di prima.

È ovvio dalla definizione che

$$W+V = \text{Span} \{ v_1, v_2, w_1, w_2 \}$$

Per sapere se sono una base, devo controllare la Lineare indipendenza

Per far questo impongo

$$3a + c + 3d = 0$$

$$-2a + b + c = 0$$

$$b + c + 2d = 0$$

$$a + c + d = 0$$

$$av_1 + bv_2 + cw_1 + dw_2 = 0 \text{ e risolvo}$$

Risolvere questo sistema è equivalente a mettere i 4 vettori come colonne di una matrice 4×4 e lavorare alla Gauss.

→ Se ogni riga/colonna ha il PIVOT, allora sono Liu. indep., quindi

$$\dim(V+W) = 4 \text{ e quindi } \dim(V \cap W) = 0$$

→ altrimenti NON sono Liu. indep., quindi $\dim(V+W) = 2 \text{ o } 3$ e di conseguenza l'intersezione

Ora dico che $\dim(V+W)$ NON è 2. Se lo fosse, allora $\dim(V \cap W) = 2$, quindi $V=W$, ma non è possibile perché $(1, 1, 1, 1) \notin V$.

Osserviamo che $w_2 \in V$ (verifica le equazioni!), quindi

$V \cap W$ ha dimensione 1, quindi $W+V$ ha dim 3

$$W+V = \text{Span} \{ (3, 0, 2, 1) \}$$

↑ sta in entrambi

Esempio 3 $X =$ matrici 2×2 .

$$V = \left\{ A \in X : A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \right\} = \text{matrici } 2 \times 2 \text{ che commutano con } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow B \qquad \qquad \uparrow B$

Verifichiamo che è un s.sp.

• Somma Se $A_1 \in V$ e $A_2 \in V$, è vero che $A_1 + A_2 \in V$?

$$A_1 B = B A_1$$

$$A_2 B = B A_2$$

$\leadsto$ sommando

$$(A_1 + A_2) B = B (A_1 + A_2)$$

$$\downarrow \\ A_1 + A_2 \in V$$

Stessa cosa per il prodotto

Calcolare la dimensione e trovare una base di V

Super-bovino. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La condizione data diventa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 2a+c & \leadsto c=0 \\ a+b = 2b+d & \leadsto a-b-d=0 \\ 2c = c & \leadsto c=0 \\ c+d = d & \leadsto c=0 \end{cases}$$

La soluzione generale è

$$b=t, d=s, c=0, a=t+s$$

$$(a, b, c, d) = (t+s, t, 0, s) = t(1, 1, 0, 0) + s(1, 0, 0, 1)$$

$\nearrow$ base $\qquad \qquad \nearrow$

Tornando, alle matrici, una base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \leadsto \text{quindi } \dim V = 2$$

Esempio 4 $X = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ ↗ derivate

$$V = \{ p(x) \in X : p(2) = 0 \text{ e } p'(3) = 0 \}$$

↗ è importante che sia 0

Verificare per esercizio che V è un s.sp. di X .

Trovare $\dim(V)$ e una base.

Bovinamente $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \rightsquigarrow$ sostituisco $x=2$

$$p'(x) = b + 2cx + 3dx^2 \rightsquigarrow$$
 sostituisco $x=3$

Le condizioni diventano

$$\begin{cases} a + 2b + 4c + 8d = 0 \\ b + 6c + 27d = 0 \end{cases}$$

Sistema già a scala, con c e d variabili libere

$$d = t, c = s, b = -6s - 27t, a = -2b - 4c - 8d = 12s + 54t - 4s - 8t = 8s + 46t$$

$$(a, b, c, d) = (8s + 46t, -6s - 27t, s, t) \\ = t(46, -27, 0, 1) + s(8, -6, 1, 0)$$

↑ ↑
lin. indep.

Una base di V (che ha $\dim = 2$) è

$$V = \text{Span}(46 - 27x + x^3, 8 - 6x + x^2)$$

Esiste una base di V in cui tutti gli elementi hanno grado 3?
 " " " " " " < 3?

1ª Risposta: SÌ! basta sostituire il 2° con la somma dei due !!

2ª Risposta: NO! Se esistesse, tutti gli el. di V avrebbero grado < 3 e questo è falso perché ne abbiamo trovato 1.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 21

Note Title

26/10/2021

MATRICE INVERSA

Data una matrice $n \times n$ A , si dice inversa di A la matrice B tale che

$$AB = BA = Id$$

↑ matrice identica

La matrice inversa, se esiste, è unica.

Se A rappresenta una certa applicazione lin. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, allora B rappresenta l'applicazione inversa (prodotto di matrici = composizione di applic. lin.), dunque B esiste se e solo se f è iniettiva e surgettiva. Essendo lin. tra spazi della stessa dim. f iniettiva $\Leftrightarrow f$ surgettiva.

Quindi B esiste se e solo se

$$Ax = 0$$

ha solo la solut. $x=0$, il che è vero se e solo se le colonne di A sono lin. indip.

Proprietà facili

$$\textcircled{1} (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (A \text{ e } B \text{ sono } n \times n)$$

Verifica $\underline{AB} \cdot \underline{B^{-1}A^{-1}} = \underline{A \cdot Id} \cdot A^{-1} = \underline{AA^{-1}} = Id$

$$\underline{B^{-1}A^{-1}} \cdot \underline{AB} = \underline{B^{-1} \cdot Id} \cdot B = \underline{B^{-1}B} = Id$$

$$\textcircled{2} (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Verifica

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = \text{Id}^t = \text{Id}$$

$$(MN)^t = N^t M^t$$

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = \text{Id}^t = \text{Id}.$$

Achtung!

$$(A+B)^{-1} \text{ NON } \hat{=} A^{-1} + B^{-1}$$

Tecniche di calcolo

→ Algoritmo di Gauss (OGGI)

→ Formula con Determinanti (PIÙ AVANTI)

Inversa via Gauss

Algoritmo

→ Voglio calcolare l'inversa di A

→ Scrivo $(A | \text{Id})$

→ Lavoro alla Gauss fino ad ottenere $(\text{Id} | B)$

→ Allora $B = A^{-1}$.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 35 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 60 & 0 & 35 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \end{array} \right)$$

↑
 A^{-1}

Sarebbe opportuno fare la verifica moltiplicando.

Formula per il caso 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Si verifica
moltiplicando

Perché funziona l'algoritmo strano

- ① Lavorare alla Gauss su una matrice A equivale a moltiplicare A a sinistra per una opportuna matrice R .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{copio } R_1 \\ \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ \leftarrow \text{copio } R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{☺}$$

Adesso copio le prime 2
e faccio $R_3 - 3R_1$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{copio la 1}^a \\ \rightsquigarrow \text{copio la 2}^a \\ \rightsquigarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

- ② Fare tanti passaggi alla Gauss, vuol dire moltiplicare tante volte a sinistra

$$A \rightsquigarrow R_1 A \rightsquigarrow R_2 R_1 A \rightsquigarrow \underbrace{R_n \dots R_2 R_1}_R A \rightsquigarrow RA$$

ma questo è equivalente a moltiplicare una sola volta per il prodotto di tutte le R_i

- ③ Se moltiplico $R(A_1 | A_2) = (RA_1 | RA_2)$
 $\uparrow$
 prodotto righe per colonne

- ④ Siamo partiti da $(A | Id)$ e lavorando abbiamo ottenuto

$$(RA | RID) = (RA | R)$$

$\uparrow$
 se qui c'è Id , allora $R = A^{-1}$ ☺
 — 0 — 0 —

Matrice inversa e cambio di base

Esempio 1 Consideriamo la base di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{cc} (1, 2) & (1, 3) \\ \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

Scrivere le matrici di cambio di base

$$\text{canonica} \rightsquigarrow \{v_1, v_2\}$$

$$\{v_1, v_2\} \rightsquigarrow \text{canonica}$$

La canonica è $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$.

Facile : $\{v_1, v_2\} \rightsquigarrow \text{canonica}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

Questa matrice prende in INPUT componenti rispetto alla $\{v_1, v_2\}$ e restituisce in OUTPUT componenti rispetto alla canonica

$$7v_1 - 3v_2 = 7(1, 2) - 3(1, 3) = (4, 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

Memo orologio $\{e_1, e_2\} \rightarrow \{v_1, v_2\}$. La matrice richiesta è l'inversa della precedente!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow \\ ad-bc}}{1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{dalla canonica alla strana}$$

Ad esempio: consideriamo il vettore $(7, 8)$ e ci chiediamo chi sono le sue comp. rispetto alla v_1, v_2

1° modo: risolvo $av_1 + bv_2 = (7, 8) \rightsquigarrow$ trovo a e b

2° modo: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix}$

Verifica: $13v_1 - 6v_2 = 13(1, 2) - 6(1, 3) = (7, 8) \quad \text{😊}$
 $\quad \quad \quad \underline{\quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad}$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 22

Note Title

26/10/2021

① Dati n vettori in $\mathbb{R}^n$, come determino se sono una base?

PRIMA: controllo lin. indep. e/o essere generatori

DOPO: calcolo un **DETERMINANTE**

② Dati k vettori in $\mathbb{R}^n$, come determino la dim. del loro span?

PRIMA: lin. indep. e lemma di eliminazione

DOPO: calcolo un **RANGO**

Due modi di vedere il Det

→ Prende in INPUT n vettori di $\mathbb{R}^n$ e restituisce un numero.

Il numero è 0 $\Leftrightarrow$ sono lin. dip.

→ Prende in INPUT una matrice $n \times n$ e restituisce un numero

(il collegamento è usare quei n vettori come righe di una matrice $n \times n$)

INDICE ① Definizione (assiomatica)

② Prime conseguenze

③ Casi 2×2 e 3×3

④ Determinante e algoritmo di Gauss

⑤ Casi di matrici diagonali e triangolari

⑥ Sviluppi di LAPLACE

⑦ Sviluppi di LEIBNIZ

⑧ Teorema di BINET

⑨ Applicazioni classiche

→ Formula misteriosa

→ Formula di CRAMER per sistemi lineari

→ Formula per matrice inversa

① Definizione assiomatica Vogliamo che abbia 4 proprietà

$$(\text{Det } 1) \quad \text{Det}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

↑ base canonica

↑ messi a matrice viene la matrice I_n

(Det 2) Se fra gli n vettori ce ne sono 2 uguali, allora $\text{Det} = 0$
(se la matrice ha 2 righe uguali...)

$$(\text{Det } 3) \quad \text{Det}(v_1, \dots, v_i + \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

$$= \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \text{Det}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

"le somme escono fuori"

$$(\text{Det } 4) \quad \text{Det}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

↑ numero

"le costanti escono fuori"

Teorema (misterioso) Esiste un'UNICA funzione che ha queste proprietà.

② Prime conseguenze

(Det 5) "le comb. lin. escono fuori"

$$\text{Det}(v_1, \dots, c_1 w_i + \dots + c_k w_k, \dots, v_n)$$

↑ posizione i

↓

posiz i

↑

$$= c_1 \text{Det}(v_1, \dots, w_i, \dots, v_n) + \dots + c_k \text{Det}(v_1, \dots, w_k, \dots, v_n)$$

Dim: con la (Det 3) tiro fuori le somme, poi con la (Det 4) le costanti.

(Det 6) "Alternanza"

"Se scambio tra di loro due degli n vettori, allora il det cambia segno"

$$\text{Det}(u_1, \dots, \underbrace{u_i, \dots, u_j}_{\text{posiz. } i \text{ e } j}, \dots, u_m) = -\text{Det}(u_1, \dots, \underbrace{u_j, \dots, u_i}_{\text{posiz. } j \text{ e } i}, \dots, u_m)$$

Dim $0 = \text{Det}(u_1, \dots, \underbrace{u_i + u_j}_{\text{pos. } i}, \dots, \underbrace{u_i + u_j}_{\text{pos. } j}, \dots, u_m)$

$= \text{Det}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i + u_j, \dots, u_m) + \text{Det}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i + u_j, \dots, u_m)$
 tiro fuori la 1^a somma

$$\begin{aligned} &= \text{Det}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_m) \rightarrow 0 \\ &+ \text{Det}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) \\ &+ \text{Det}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \quad \left. \begin{array}{l} \text{uno opposto dell'altro} \end{array} \right\} \\ &+ \text{Det}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_j, \dots, u_m) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(Det 7) Supponiamo che u_1 sia comb. lin. di $u_2, \dots, u_m$
 ad esempio

$$u_1 = c_2 u_2 + \dots + c_m u_m$$

$$\text{Allora } \text{Det}(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0$$

Dim: uso la (Det 5) e ottengo

$$\begin{aligned} &\text{Det}(c_2 u_2 + \dots + c_m u_m, u_2, \dots, u_m) \\ &= c_2 \text{Det}(\underbrace{u_2, u_2}_{0}, \dots, u_m) + \dots + c_m \text{Det}(u_m, \underbrace{u_2, \dots, u_m}_{0}) \end{aligned}$$

sono tutti 0 per colpa (o merito) della Det 2.

(Det 8) Se $v_1, \dots, v_m$ sono LIN. DIP., allora $\text{Det} = 0$

Dim: basta ricavare uno in funzione degli altri.

A meno di fare scambi di vettori, possiamo supporre sempre che sia il primo.

IN QUESTO MOMENTO SIAMO A METÀ (LIN. DIP. $\Rightarrow \text{Det} = 0$)

Mancava l'altra freccia.

③ Caso 2×2 Siano $v_1 = (a, b)$ e $v_2 = (c, d)$

Dico che

$$\text{Det}(v_1, v_2) = ad - bc$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad \text{Det}(v_1, v_2) &= \text{Det}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= a \text{Det}(e_1, ce_1 + de_2) + b \text{Det}(e_2, ce_1 + de_2) \end{aligned}$$

$$= ac \underset{0}{\text{Det}(e_1, e_1)} + ad \underset{1 \text{ per la (Det 1)}}{\text{Det}(e_1, e_2)}$$

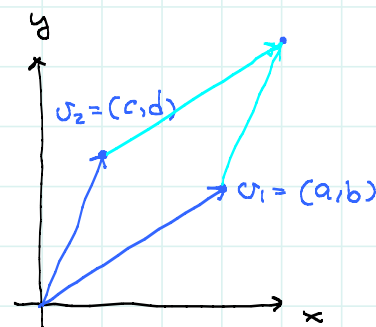
$$+ bc \underset{0}{\text{Det}(e_2, e_1)} + bd \underset{0}{\text{Det}(e_2, e_2)}$$

$$= -bc \underset{-1}{\text{Det}(e_1, e_2)} \text{ per la (Det 6)}$$

$$= ad - bc$$

Interpretazione geometrica

$\text{Det}(v_1, v_2) = \text{Area parall. con seguo}$
(+ se v_2 va su v_1 in
senso antiorario)



Dall'interp. geometrica segue

→ la faccenda dello scambio dei segni

→ il fatto che viene 0 se e solo se u_1 e u_2 sono multipli, cioè se e solo se sono lin. DIP.

Come si dim. l'interp. geom.?

1° modo (Ultra-bovino) Scompone in rettangoli e triangoli, con enormi complicazioni a seconda dei quadranti

2° modo Area = lato · lato · sin (angolo compreso)

$$= \|u_1\| \cdot \|u_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle u_1, u_2 \rangle^2}{\|u_1\|^2 \|u_2\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|u_1\|^2 \cdot \|u_2\|^2 - \langle u_1, u_2 \rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}$$

$$= \sqrt{\cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{b^2d^2} - \cancel{a^2c^2} - \cancel{b^2d^2} - 2abcd}$$

$$= \sqrt{(ad-bc)^2} = |ad-bc| = |\text{Det}|$$

$$= 2 \text{ Area triangolo con vertici } 0, u_1, u_2.$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 23

Note Title

26/10/2021

Caso 3×3

$$v_1 = (a, b, c)$$

$$v_2 = (d, e, f)$$

$$v_3 = (g, h, i)$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(ae_1 + be_2 + ce_3, de_1 + ee_2 + fe_3, ge_1 + he_2 + ie_3)$$

= vengono 27 termini, di cui molti sono nulli

[espandere per esercizio]

$$= aei \det(e_1, e_2, e_3) + a \overbrace{fh}^{-1} \det(e_1, e_3, e_2)$$

$$+ bdi \det(e_2, e_1, e_3) + b \overbrace{fg}^{-1} \det(e_2, e_3, e_1)$$

$$+ cdh \det(e_3, e_1, e_2) + c \overbrace{eg}^{-1} \det(e_3, e_2, e_1)$$

$$\det(e_2, e_3, e_1) = -\det(e_1, e_3, e_2) = \det(e_1, e_2, e_3) = 1$$

$$\det(e_3, e_1, e_2) = -\det(e_1, e_3, e_2) = \det(e_1, e_2, e_3) = 1$$

$$= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

REGOLA DI SARRUS (per ricordare la formula)

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & c \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

↑ ricopio prime
2 colonne

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= 1 + 0 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot (-1) \\ &\quad - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) \\ &= 1 + 0 - 6 - 10 - 0 + 4 = 5 - 16 = -11 \end{aligned}$$

Questo ci dice che $(1, 0, 2), (3, 1, 4), (5, -1, 1)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Achtung! Sarrus funziona SOLO con 2×2 e 3×3 .

④ Determinante e algoritmo di Gauss

Se lavoro alla Gauss, che succede al det?

→ Se scambio 2 righe, det. cambia segno (Det 6)

→ Se sostituisco R_i con $R_i + b R_j$ (ultra-ortodossa)

$\text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_i, \dots, R_n)$ iniziale

$\text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_i + b R_j, \dots, R_n)$

$$\begin{aligned} &= \text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_i, \dots, R_n) \\ &\quad + b \underset{\text{0}}{\text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_j, \dots, R_n)} \end{aligned}$$

Il determinante NON cambia

→ Se sostituisco R_i con $a R_i + b R_j$ (qualunque) il Det viene moltiplicato per a .

Se sappiamo fare il Det alla fine, allora sappiamo il Det iniziale

⑤ Matrici diagonali e triangolari

Matrice diagonale = numeri sulla diag. principale, zeri altrove
 anche 0

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= \text{Det}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_m e_m) \\ &= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_m e_m) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, \lambda_3 e_3, \dots, \lambda_m e_m) \\ &= \dots = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \text{Det}(\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_m}_I) \end{aligned}$$

Matrice triangolare superiore = roba sulla diag. Oppure sopra, zeri sotto.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \text{roba} & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$$

Dim Scrivo la prima riga come

$$\lambda_1 e_1 + \underbrace{c_2 e_2 + \dots + c_m e_m}_{\substack{\uparrow \\ \text{altri numeri della} \\ \text{prima riga}}} = \lambda_1 e_1 + \underbrace{w}_{\substack{\uparrow \\ \text{tutto il resto, cioè una} \\ \text{comb. lin. di } e_2, e_3, \dots, e_m}}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(R_1, R_2, \dots, R_m) &= \text{Det}(\lambda_1 e_1 + w, R_2, \dots, R_m) \\ &= \lambda_1 \text{Det}(e_1, R_2, \dots, R_m) + \underbrace{\text{Det}(w, R_2, \dots, R_m)}_0 \end{aligned}$$

Osservo che $w, R_2, \dots, R_n$ sono n vettori con uno 0 in testa, quindi è come se fossero n vettori in $\mathbb{R}^{n-1}$, quindi sono LIN.DIP., quindi il loro Det = 0.

Quindi

$$\text{Det}(R_1, R_2, \dots, R_n) = \lambda_1 \text{Det}(e_1, R_2, R_3, \dots, R_n) = (*)$$

Ora scrivo $R_2 = \lambda_2 e_2 + \underbrace{c_3 e_3 + \dots + c_n e_n}_w$

$$(*) = \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2 + w, R_3, \dots, R_n)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, R_3, \dots, R_n) + \lambda_1 \text{Det}(e_1, w, R_3, \dots, R_n)$$

0
sono n vettori con 0
sulla seconda componente

Procedendo allo stesso modo per n passaggi resta

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \text{Det}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

1

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo Det con Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

operazioni
ultra-ortodosse
 $\Rightarrow$ Det non cambia

Det finale = Det iniziale = -1

Oss importante Quando lavoro alla Gauss, lo Span delle righe NON cambia

Se scambio le righe è ovvio, altrimenti $R_i \rightsquigarrow aR_i + bR_j$ posso usare il lemma di eliminazione

$$\begin{aligned} \text{Span}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_m) &= \text{Span}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_m, aR_i + bR_j) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{posso eliminare} \\ &\quad \text{l'ultimo, che è} \\ &\quad \text{comb. lin. degli altri} \\ &= \text{Span}(R_1, \dots, \cancel{R_i}, \dots, R_m, aR_i + bR_j) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{posso eliminare } R_i, \\ &\quad \text{che è comb. lin. di} \\ &\quad R_j \text{ e dell'ultimo} \end{aligned}$$

eliminato

Se $R_1, \dots, R_m$ sono LIN. INDIP., alla fine del procedimento alla Gauss trovo una matrice a scala con l'ultima riga NON tutta nulla (altrimenti di un Span è scesa).

Ma allora tutti i gradi di sono da uno, e quindi tutte le righe/colonne hanno PIVOT $\neq 0$



Quindi $\text{Det} \neq 0$

ORA SIAMO ALLA FINE DELL'OPERA, cioè

$$u_1, \dots, u_m \text{ lin. indep.} \Rightarrow \text{Det} \neq 0$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 24

Note Title

29/10/2021

⑥ SVILUPPI DI LAPLACE

Sottomatrici Data una matrice, una sottomatrice si ottiene cancellando alcune righe / colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Minori Sono i determinanti di tutte le sottomatrici quotate

Caso speciale Data una matrice quadrata $A \in M_{n \times n}$, si indica con $A_{i,j}$ la sottomatrice che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j . Charamente $A_{i,j} \in M_{(n \times n) \setminus (n-1)}$

Sviluppi di Laplace rispetto alla 1ª colonna Sia $A \in M_{n \times n}$. Allora

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}$$

con questa formula si può calcolare un $\det$ $n \times n$ se si sanno calcolare i $\det$ $(n-1) \times (n-1)$

Esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

$$a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Sviluppo di LAPLACE rispetto alla colonna j

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \text{Det}(A_{i,j})$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

Sviluppando risp. alla seconda colonna

$$-b \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + e \text{Det} \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} - h \text{Det} \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}$$

Teorema Gli sviluppi di Laplace rispetto ad una qualunque colonna sono sempre uguali al $\text{Det}(A)$.

Idea della dim. Consideriamo risp. prima colonna.

Basta dim. che il risultato della formula soddisfa (Det 1), (Det 2), (Det 3) e (Det 4).

Det 1 Resta solo il primo addendo che fa proprio 1.

Det 2 Se $R_i = R_j$, allora in tutte le sottomatrici quelle 2 righe sono ancora uguali. Ci sono solo le 2 eccezioni in cui quelle righe sono state cancellate. Quei termini si cancellano per la scelta dei segni.

Det 3 Se $R_i = R_i' + R_i''$, allora il Det è la somma dei Det. La stessa cosa succede in tutte le sottomatrici tranne quella in cui si cancella quella riga, ma in quel caso $a_{i,1} = a_{i,1}' + a_{i,1}''$.

Det 4 Il fatto che le costanti escano fuori è quasi ovvio

Osservazione logica

- Il teo. misterioso mostra che esiste una funzione che soddisfa le 4 richieste.
- L'eliminazione alla Gauss, e il conto finale per le matrici triangolari ci dice che è unica.

(Oidio: Gauss non dice che esiste, perché lavorando in modo diverso potremmo ottenere risultati diversi, e in questo caso vorrebbe dire che $(\text{Det } \pm) \dots (\text{Det } 4)$ sono tra di loro NON compatibili).

Sviluppi di Laplace per riga Fisso la riga i

$$\text{Det}(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \text{Det}(A_{i,j})$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Rispetto alla 3^a riga:

$$g \text{Det} \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} - h \text{Det} \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} + i \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

Oss. Negli sviluppi per riga / colonna i segni sono presi a scacchiera, partendo con + in alto a sx

+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+

Teorema Gli sviluppi per riga coincidono con quelli per colonna.

Corollario $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^t)$

Dim Sviluppare $\text{Det}(A)$ per riga è come sviluppare $\text{Det}(A^t)$ per colonna.

Dim teorema Sviluppiamo lungo la riga i .

Caso molto semplice Nella riga i ci sono tutti 0, tranne un 1 in posizione j

riga i $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

↑
colonna j

Sviluppo per riga =
 $(-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot \text{Det}(A_{i,j})$

Se sviluppo rispetto alla colonna j ottengo lo stesso termine e gli altri sono tutti 0 perché le sottomatrici hanno una riga di 0.

Caso altrettanto semplice Nella riga i ci sono tutti 0, tranne un λ nella posizione j .
Questo caso è come il precedente

Caso generale Nella riga i c'è di tutto!

$$\begin{pmatrix} * & & & \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ & * & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{riga } i \end{matrix} = \begin{pmatrix} * & & & \\ c_1 & 0 & \dots & 0 \\ & * & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & & & \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ & * & & \end{pmatrix} + \dots$$

$M \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \dots$

$$\text{Det}(M) = \text{Det}(M_1) + \text{Det}(M_2) + \dots + \text{Det}(M_m)$$

$$\text{Det}(M) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} c_i \text{Det}(A_{i,1}) + \sum_{i=1}^m (-1)^{i+2} c_i \text{Det}(A_{i,2}) + \dots$$

casi precedenti

Così si ottiene lo sviluppo per riga

Achtung!

Non è vero che $\text{Det}(A+B) = \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$
 Questo vale solo se A e B differiscono solo in
 una riga (nel qual caso è proprio la (Det 3))

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 9 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppo risp. 2ª riga

$$\text{Det } A = 2 \cdot 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (40 - 24 - 8) = 16$$

Come calcolo un Det?

- Se 2×2 o 3×3 uso Sarrus
- Se ci sono tanti 0, uso Laplace con righe / colonne giuste
- Se è pieno di tutto, allora uso Gauss.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 25

Note Title

29/10/2021

⑦ **SVILUPPI DI LEIBNIZ** Quali sono i termini che compaiono in un determinante?

$$\begin{pmatrix} a & \textcircled{b} & c \\ d & e & \textcircled{f} \\ \textcircled{g} & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = \dots + bfg$$

↑
prodotto di 3 elementi,
presi in righe e colonne diverse

Analogamente: un Det $n \times n$ è la somma di tanti termini, ciascuno dei quali è il prodotto di n elementi della matrice, tutti presi da righe e colonne diverse. Il segno può essere $+$ o $-$, con la solita regola degli scambi.

$$\begin{pmatrix} 1 & \textcircled{2} & 3 & 4 \\ 7 & 9 & \textcircled{5} & 6 \\ \textcircled{1} & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & \textcircled{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = \dots \pm 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 7$$

$$(e_2, e_3, e_1, e_4) \rightsquigarrow (e_1, e_3, e_2, e_4) \rightsquigarrow (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

Segno = $(-1)^{\# \text{ scambi}}$, quindi nel nostro caso è $+$.

Domanda: quanti sono gli addendi nel Det 4×4 ? 24

Abbiamo: 4 scelte per l'el. della 1ª riga

3 " " " 2ª "

2 " " " 3ª "

La quarta riga è obbligata

Nel caso $n \times n$ i termini sono $n!$

Oss. L'utilità di Leibniz è teorica, perché si può verificare che la formula ottenuta verifica le 4 proprietà

⑧ TEOREMA DI BINET Se A e B sono matrici $n \times n$, allora

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Conseguenza: una matrice A è invertibile se e solo se

$$\det(A) \neq 0$$

ed in tal caso

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dim. Se $A \cdot A^{-1} = Id$, allora $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(Id) = 1$.

Per la parte di esistenza, la matrice A è invertibile se e solo se la corrisp. applic. lin. è iniettiva e surgettiva. Essendo le dim. uguali basta la surgettività, cioè avere le colonne lin. indip. Ma allora A^t ha le righe lin. indip., cioè $\det(A^t) \neq 0$
" $\det(A)$.

Dim. teo. di Binet

Per prima cosa si distinguono 2 casi

$$\rightarrow \det B \neq 0$$

$$\rightarrow \det B = 0$$

Caso $\text{Det } B = 0$

Voglio dimostrare che anche $\text{Det } (AB) = 0$

Già pensato:

$$\text{Det } B = 0 \Leftrightarrow \text{Det } (B^t) = 0$$

$\Leftrightarrow$ righe di B^t sono lin. dip.

$\Leftrightarrow$ colonne di B sono lin. dip.

$\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$ colonne di (AB) sono lin. dip.

$\Leftrightarrow$ righe di $(AB)^t$ sono lin. dip.

$$\Leftrightarrow \text{Det } ((AB)^t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Det } (AB) = 0$$

Resta da controllare il ?

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{array} \right) \Rightarrow AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} AC_1 & AC_2 & \dots & AC_m \end{array} \right)$$

$\uparrow$
vero per le
colonne

Se esiste una relazione $x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_m C_m = 0$ senza che tutti gli x_i siano nulli, allora applicando A troviamo che anche

$$x_1 AC_1 + \dots + x_m AC_m = 0 \quad \leadsto \text{le colonne di } AB \text{ sono lin. dip.}$$

"

$$A (x_1 C_1 + \dots + x_m C_m)$$

Esempio 1 Consideriamo i polinomi

$$1+x$$

$$12+x^2$$

$$1+x+x^3$$

$$3+x-6x^3$$

Domanda: sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$?

Risposta preistorica: controllo che siano generatori E siano lin. indep.

Risposta antica: controllo la lin. indep., cioè impongo
 $a(1+x) + b(12+x^2) + c(1+x+x^3) + d(3+x-6x^3) = 0$
 e spero che $a=b=c=d=0$.

Risposta moderna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Li ho messi in riga, ma in colonna andata bene uguale

$$\text{Det} = \underset{\substack{\uparrow \\ 3^{\text{a}} \text{ colonna}}}{-1} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} = -(-6+3+6-1) = -2 \neq 0$$

$\leadsto$ sono una base

Esempio 2 Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ le basi

$$\{(1,3), (7,1)\}$$

v_1

v_2

$$\{(1,4), (1,5)\}$$

w_1

w_2

Scrivere la matrice di cambio base dalla $\{v_1, v_2\}$ alla $\{w_1, w_2\}$.

Metodo bovino

$$\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \end{array}$$

$$(1,3) = a(1,4) + b(1,5)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
prima colonna

Più astuto

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Da $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Da $\{w_1, w_2\}$ alla canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

 $\{v_1, v_2\} \rightsquigarrow$ canonica $\rightsquigarrow \{w_1, w_2\}$

"

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 34 \\ -1 & -27 \end{pmatrix}$$

→ prende in INPUT
componenti rispetto
a $\{v_1, v_2\}$ e restituisce
componenti rispetto a
 $\{w_1, w_2\}$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 26

Note Title

02/11/2021

9) TRE APPLICAZIONI CLASSICHE DEL DETERMINANTE

9.1 Formula misteriosa per vettori ortogonali in $\mathbb{R}^3$

Dati $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, cerco un vettore $\perp$ a u e w

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (u_2 w_3 - u_3 w_2, u_3 w_1 - u_1 w_3, u_1 w_2 - u_2 w_1)$$

$\text{Det}(A_{1,1}) \quad - \text{Det}(A_{1,2}) \quad \text{Det}(A_{1,3})$

Verifichiamo che il vettore ottenuto è $\perp$ a u .

Sostituisco gli asterischi con u_1, u_2, u_3 . Ottengo

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

ci sono 2 righe uguali

$$0 = \text{Det} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{rispetto 1}^{\text{a}} \text{ riga}}}{=} u_1 \cdot \text{Det}(A_{1,1}) - u_2 \text{Det}(A_{1,2}) + u_3 \text{Det}(A_{1,3})$$

= prodotto scalare tra u e il vettore prodotto dalla formula ex-misteriosa

Verifichiamo che il vettore ottenuto è $\perp$ a w

Stessa cosa a partire dalla matrice

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$R_1 = R_3$

$$0 = \text{Det} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{1}^{\text{a}} \text{ riga}}}{=} w_1 \text{Det}(A_{1,1}) - w_2 \text{Det}(A_{1,2}) + w_3 \text{Det}(A_{1,3})$$

Analogo in dimensione 4 o più

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\overset{\uparrow}{\text{Det } A_{1,1}}, -\overset{\uparrow}{\text{Det } A_{1,2}}, \overset{\uparrow}{\text{Det } A_{1,3}}, -\overset{\uparrow}{\text{Det } A_{1,4}})$$

Tutti determinanti 3×3

Il vettore prodotto dalla formula è $\perp$ ai 3 vettori v, w, z .

Alternativa buona: risolvo il sistema lineare

$$v_1 a + v_2 b + v_3 c + v_4 d = 0$$

$$w_1 a + w_2 b + w_3 c + w_4 d = 0$$

$$z_1 a + z_2 b + z_3 c + z_4 d = 0$$

nelle incognite a, b, c, d (le soluzioni del sistema hanno ALMENO un grado di libertà, perché posso moltiplicare ogni soluzione per un qualunque scalare).

— o — o —

9.2 Formula di CRAMER per i sistemi lineari

Setting: sistemi quadrati del tipo $Ax = b$

$\uparrow$ $\uparrow$
 matrice $n \times n$ n termini noti
 quadrata n incognite
 (n equ.)

Formula di CRAMER:

$$x_i = \frac{\text{Det}(A_i)}{\text{Det}(A)}$$

dove

- A è la matrice dei coeff.
- A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con b .

Esempio

$$x - z = 2$$

$$2x + y - 3z = 5$$

$$x - y + 5z = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

ho sostituito la
prima colonna con
i termini noti

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ho sostituito la
seconda
colonna

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

Stessa cosa per z .

Oss. La formula funziona quando $\det(A) \neq 0$. In questo caso il sistema ha sempre soluzione unica, qualunque sia la colonna dei termini noti.

($\det A \neq 0 \Rightarrow$ le colonne sono lin. indip.

$\uparrow$ propr. dei det.

$\Rightarrow$ le colonne sono una base

$\uparrow$ sono n e sono dunque n

$\Rightarrow$ ogni b si scrive in modo unico come

$\uparrow$ comb. lin. delle colonne

proprietà delle base

]

Dim. formula di CramerSiano $C_1, \dots, C_n$ le colonne di A Supponiamo che $(x_1, \dots, x_n)$ sia una soluzione del sistema, cioè

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b$$

$$\text{Det}(A_i) = \text{Det}(C_1, \dots, C_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posiz. } i}}{b}, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

$$= \text{Det}(C_1, \dots, C_{i-1}, \underbrace{x_1 C_1 + \dots + x_n C_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{posiz. } i}}, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

porto la comb. lin. fuori

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &= x_1 \text{Det}(C_1, \dots, C_1, \dots, C_n) + \\ &\quad x_2 \text{Det}(C_1, \dots, C_2, \dots, C_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad x_i \text{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad x_n \text{Det}(C_1, \dots, C_n, \dots, C_n) \end{aligned}$$

essendo $\text{Det } A = \text{Det}(A^t)$
quello che potevamo fare con le righe lo possiamo fare con le colonne

$$= x_i \text{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = x_i \text{Det}(A)$$

$\uparrow$
in tutte le altre matrici
c'è una colonna ripetuta
2 volte

$$\text{Quindi } \text{Det}(A_i) = x_i \text{Det}(A). \quad \therefore$$

9.3 Formula per matrice inversaData A matrice $n \times n$, voglio trovare A^{-1} .

Algoritmo : $\rightarrow$ calcolare $\text{Det}(A_{i,j})$
 $\rightarrow$ segui a scacchiera
 $\rightarrow$ trasposta
 $\rightarrow$ divido per $\text{Det}(A)$.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

→ Sostituisco $a_{i,j}$ con $\det(A_{i,j})$

$$\begin{pmatrix} 7 & -35 & -7 \\ 7 & -19 & -15 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Cambio i segni a scacchiera

$$\begin{pmatrix} 7 & 35 & -7 \\ -7 & -19 & 15 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Faccio la trasposta

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 35 & -19 & -5 \\ -7 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Dividendo tutto per $\det(A)$, che si calcola, ottengo A^{-1} .

Perché funziona l'algoritmo?

Indichiamo con $x_{i,j}$ gli elementi dell'inversa

$AA^{-1} = Id$. Consideriamo la j -esima colonna di A^{-1} e immaginiamo di fare il prodotto

$$A \left(* \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix} * \right) = \left(* \begin{pmatrix} Ax \end{pmatrix} * \right)$$

$\uparrow$
 colonna j

Ora vogliamo che $Ax = b$, dove b ha tutti 0, tranne
nella riga j dove c'è 1

A questo punto calcoliamo x usando CRAYER

$\det(A_i) \leftarrow$ ho messo b al posto della colonna i

$$x_{i,j} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad \text{passo 4 dell'algoritmo}$$

$$A_i = \left(* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} * \right) \leftarrow \text{riga } j$$

↑
colonna i

Alla fine $\det A_i =$
↑
Laplace rispetto
colonna i

$$(-1)^{i+j} \det(A_{j,i})$$

↑ ↑
riga colonna

↑ ↑
seguì trasposta

e questo è proprio quello che dice l'algoritmo

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 27

Note Title

02/11/2021

RANGO DI UNA MATRICE

Def. Sia A una matrice $n \times m$. Si definisce

- R-rango il max numero di righe lin. indip. (di sicuro $\leq m$)
- C-rango il max numero di colonne lin. indip. (" " $\leq n$)
- D-rango il più grande k per cui esiste una sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$. (di sicuro $\leq \min\{m, n\}$)

Caratterizzazioni

C-rango

- max numero col. lin. indip.
- $\dim \text{Span}(C_1, C_2, \dots, C_m)$
- dimensione di $\text{Im}(A)$ vista come $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

R-rango

- max numero righe lin. indip.
- $\dim \text{Span}(R_1, \dots, R_n)$
- dimensione di $\text{Im}(A^t)$ vista come $A^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

D-rango

- Succede che D-rango = k se accadono 2 cose
- esiste ALMENO una sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$
- TUTTE le sottomatrici $(k+1) \times (k+1)$ hanno $\det = 0$.

TEOREMA FONDAMENTALE

Qualunque sia la matrice, vale che

$$\text{R-rango} = \text{C-rango} = \text{D-rango}$$

(e quindi useremo solo la parola
rango senza specificazione)

$$\boxed{R\text{-rank} = C\text{-rank}}$$

Segue da 2 fatti generali

Prop 1 Se lavoro alla Gauss su una matrice, allora ad ogni passaggio $R\text{-rank}$ e $C\text{-rank}$ non cambiano.

Prop 2 Per una matrice ridotta a scala, vale che

$$\boxed{C\text{-rank} = R\text{-rank} = \text{numero dei PIVOT}}$$

Oss. Dete per buone le 2 prop., segue che $R\text{-rank} = C\text{-rank}$ sempre.

(Lavoro alla Gauss fino ad avere una matrice a scala.

I due ranghi non cambiano strada facendo.

Essendo uguali alla fine, erano uguali all'inizio).

Dim Prop 1

$R\text{-rank}$ non cambia Usiamo che $R\text{-rank} = \dim \text{Span}(R_1, \dots, R_n)$

Abbiamo già visto che lo $\text{Span}(R_1, \dots, R_n)$ non cambia lavorando alla Gauss

(se scambio due righe è ovvio. Se faccio $R_i \rightsquigarrow aR_i + bR_j$, allora per il Lemma di eliminazione $\leftarrow$ [corretto dopo video])

$$\begin{array}{lcl} \text{Span}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_n, aR_i + bR_j) & \nearrow & \text{Span}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_n) \\ & \nearrow \text{elimino ultima} & \\ & \nearrow & \text{Span}(R_1, \dots, aR_i + bR_j, \dots, R_n) \\ & \nearrow \text{elimino } R_i & \end{array}$$

C-rango occhio: quando lavoro alla Gauss, lo Span delle colonne può cambiare, ma la sua dimensione NO.

Abbiamo visto a suo tempo che lavorare alla Gauss non cambia le soluz. del sistema lineare $Ax=0$.

Sia A' ottenuta da A lavorando alla Gauss. Allora

$$\text{C-rango di } A = \dim \text{Im}(A)$$

$$\text{rank-nullity} \rightarrow = m - \dim(\ker(A))$$

$$= m - \dim(\ker(A'))$$

i due ker sono uguali perché sono le soluz. di $Ax=0$ e $A'x=0$

$$\text{rank-nullity} \rightarrow = \dim \text{Im}(A')$$

$$= \text{C-rango di } A'$$

Dim. Prop. 2 Consideriamo una matrice a scala. Supponiamo che abbia p PIVOT.

$$\begin{pmatrix} * & & & & & & \text{roba} \\ 0 & 0 & 0 & * & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & & \\ 0 & \text{-----} & 0 & & & & \\ 0 & \text{-----} & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

R-rango = p

È evidente che il max numero di righe lin. indep. è $\leq p$.

Dico che le prime righe, quelle con i PIVOT, sono davvero lin. indep., e quindi sono proprio p . Supponiamo che

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_p R_p = 0$$

Ora

- $x_1 = 0$ perché è l'unico modo per ottenere 0 nella posiz. del primo PIVOT

- Una volta che so che $x_1 = 0$, allora anche $x_2 = 0$ perché è l'unico modo di avere 0 nella posiz. del secondo PIVOT.
- Si procede allo stesso modo fino alla fine.

$$\boxed{C\text{-rango} = p}$$

Osserviamo che tutte le colonne della matrice hanno tutti 0 dalla $(p+1)$ -esima posizione in poi, quindi è come fossero vettori in $\mathbb{R}^p$.

Quindi al max p colonne sono lin. indep., cioè

$$C\text{-rango} \leq p.$$

Ora voglio trovare p colonne che sono davvero lin. indep.

Scelgo quelle corrispondenti ai PIVOT e le chiamo $C_1, \dots, C_p$ (non sono per forza le prime p)

Se

$$x_1 C_1 + \dots + x_p C_p = 0$$

allora posso dimostrare che $x_1 = \dots = x_p = 0$

partendo dal fondo e ragionando esattamente

come con le righe (C_p è l'unica che ha

l'ultimo el. $\neq 0$, quindi per forza $x_p = 0, \dots$)

— 0 — 0 —

$$\boxed{R\text{-rango} = D\text{-rango}}$$

$$\boxed{D\text{-rango} \leq R\text{-rango}}$$

Supponiamo che $R\text{-rango} = k$.

Devo far vedere che tutte le sottomatrici $(k+1) \times (k+1)$ hanno $\det = 0$.

Prendiamone una qualunque.

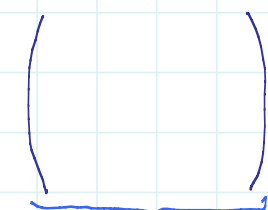
Consideriamo le corrispondenti righe di A

Esse sono lin. dip., ma allora sono

lin. dip. anche le loro restrizioni alla

sottomatrice. Ma allora la sottomatrice

ha righe lin. dip., quindi $\det = 0$.



Sottomatrice $(k+1) \times (k+1)$

R-rango $\leq$ D-rango

Supponiamo che R-rango = k .

Devo trovare una sottomatrice $k \times k$ che abbia $\det \neq 0$.

Scelgo k righe lin. indep. e butto il resto

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \\ R_2 \rightarrow \\ \vdots \rightarrow \\ R_k \rightarrow \end{matrix} \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad m \quad} \\ \\ \\ \end{array} \right) \begin{matrix} \updownarrow k \end{matrix}$$

Otengo una matrice $k \times m$ che ha k righe lin. indep., quindi con R-rango = k . Ma allora tale matrice sappiamo già che ha C-rango = k , quindi ha k colonne lin. indep.

Salvo queste e butto il resto. Ho ottenuto una $k \times k$ e questa ha $\det \neq 0$ perché ha le colonne lin. indep. (o volendo perché la sua trasposta ha le righe lin. indep.).

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 28

Note Title

02/11/2021

Rango e sistemi lineari

Consideriamo un generico sistema lineare (n equazioni, m incognite)

$$A x = b$$

$\swarrow$ matrice $n \times m$ $\uparrow$ vettore delle m incognite $\nwarrow$ vettore degli n termini noti

Chiamiamo

- A la matrice dei coeff. (matrice INCOMPLETA)
- $A' = (A|b)$ la matrice COMPLETA.

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

- ① Un sistema lineare ammette almeno una soluzione se e solo se

$$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A')$$

- ② In tal caso le soluzioni dipendono da un numero di parametri uguale a

$$m - \text{Rango comune di } A \text{ e } A'$$

- ③ In particolare la soluzione è unica se e solo se

$$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = m$$

Oss Che relazione c'è in generale fra $\text{rang}(A)$ e $\text{rang}(A')$.

$$\text{rang}(A) \leq \text{rang}(A') \leq \text{rang}(A) + 1$$

(Basta pensare al rango come C-rango: se aggiungo una colonna, il max numero di colonne lin. indep. può

→ restare uguale

→ crescere di 1)

Dim ① Il sistema ha almeno una soluzione se e solo se b è comb. lin. di $C_1, \dots, C_m$ (le colonne di A), ma in tal caso allora i due ranghi sono uguali.

② Quando ci sono soluzioni, sappiamo che tutte le soluzioni si scrivono come

$$x = x_0 + \overset{\text{parametri liberi}}{\downarrow} C_1 \overset{\uparrow}{U_1} + \dots + C_k \overset{\uparrow}{U_k}$$

base delle soluzioni di $Ax = 0$
cioè del ker dell'applic. associata ad A

Ma allora

$$\# \text{parametri} = \dim(\ker(A)) \stackrel{\text{rank-nullity}}{=} m - \dim(\text{Im}(A))$$

$$= m - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C-rango}}}{\text{rang}(A)} = \text{rang}(A')$$

③ Facile conseguenza se voglio 0 parametri, ma esistenza di una soluzione.

— o — o —

Riassunto Abbiamo 3 approcci ad un sistema lineare

- lavorare alla Gauss (comodo e funziona sempre)
- CRAMER (richiede che il sistema sia quadrato e richiede il calcolo di $\det$, che è scomodo se il sistema è grande. Può diventare utile
 - se ci sono tanti 0 nella matrice
 - se mi serve trovare una singola incognita)
- ROUCHÉ-CAPELLI (funziona per sistemi generali, ma richiede dei determinanti per fare i ranghi, e non calcola la soluzione. Può essere comodo nel caso di sistemi con parametri).

Per il calcolo della matrice inversa (utile anche per sistemi quadrati

$$Ax = b \leadsto x = A^{-1}b)$$

- partire da $(A|I)$ e arrivare a $(I|B)$
 $\uparrow$ è A^{-1}

- usare la formula con i $\det$ (scomodo nei casi grandi).

Esempio 1 Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 5 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$$

All'antica Lavoro alla Gauss portando dietro λ

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 5 \\ (-6-7\lambda)y = -19 \end{cases}$$

Se $-6-7\lambda = 0$, cioè $\lambda = -\frac{6}{7}$, allora il sistema è impossibile, altrimenti soluz. unica

Più moderno

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 5 \\ 7 & -3 & 8 \end{pmatrix} = A'$$

Osservo subito che $\text{rang}(A') = 2$. Pensando al D-rango, basta trovare sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$.

A questo punto per Rouché - Capelli il sistema ha soluz. se e solo se

$$\text{rang}(A) = 2$$

cioè se e solo se $\text{Det } A \neq 0$

$$\text{Det } A = -6 - 7\lambda \quad \text{da cui la stessa cond. di prima.}$$

incogn. rango

Quando c'è sol., questa dipende da $\overset{\downarrow}{2} - \overset{\downarrow}{2} = 0$ parametri, quindi è unica.

Esempio 2 Studiare, al variare dei parametri a e b , il numero di soluzioni di

$$\begin{cases} 2x + 3y + az = 8 \\ x - y = b \\ x + y - 3z = 5 \end{cases}$$

Quando la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & a & 8 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Fatto 1 $\text{Rang}(A)$ è 2 oppure 3

(Più di 3 non è ed esiste una sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$)

Fatto 2 Se $\text{Rang}(A) = 3$, allora il sistema ha sol. unica

(Infatti $\text{rang}(A')$ almeno 3 deve valere e di più non può perché le righe sono solo 3. Quindi $\text{Rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$)

Quindi la soluzione esiste e dipende da 0 parametri

Quando è che $\text{Rango}(A) = 3$? Se e solo se $\text{Det}(A) \neq 0$.

$$\text{Det}(A) = 6 + a + a + 9 = 0 \Leftrightarrow 2a = -15 \Leftrightarrow a = -\frac{15}{2}$$

Quindi se $a \neq -\frac{15}{2}$, allora la solut. è unica, indep. da b.

Fatto 3 Che succede se $a = -\frac{15}{2}$? $\text{Rango}(A) = 2$.

Se $\text{rango}(A') = 2$, allora ci saranno solut. dipendenti da $3 - 2 = 1$ parametri.

Se $\text{rango}(A') = 3$, e allora niente soluzioni

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -\frac{15}{2} & 8 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

↑ se $\text{rango}(A') = 2$, questa sottomatrice deve avere $\text{Det} = 0$.

$$-\frac{15}{2}b + 24 - \frac{75}{2} + 9b = 0 \leadsto \text{Trovo } b$$

Se $a = -\frac{15}{2}$ e $b \neq$ quello che trovo, allora nessuna soluzione
($\text{rango}(A) = 2 < 3 = \text{rango}(A')$)

Se $a = -\frac{15}{2}$ e $b =$ quello che trovo, allora volevo risolvere con Gauss. Non posso concludere subito che $\text{rango}(A') = 2$, perché per dimostrarlo mi servirebbe l'annullamento di TUTTI i $\text{Det } 3 \times 3$ (e questi sono 4).

In realtà bastano i due che ho fatto (spiegarli nel video)

— 0 — 0 — [↑] e qui sotto

Spiegazione: 2^a e 3^a colonna sono lin. indep.; la 1^a è comb. lin. di 2^a e 3^a (primo Det), la 4^a è comb. lin. di 2^a e 3^a (secondo Det)
 $\leadsto \text{C-rango}(A') = 2$.

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 29

Note Title

05/11/2021

Esercizio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & a & 7 & -1 \\ 5 & 0 & b & 4 \end{pmatrix}$$
 Determinare il rango al variare dei parametri a e b .

La sottomatrice 2×2 evidenziata ha $\text{Det} = 7 \neq 0 \leadsto \text{rango} \geq 2$ sempre
 Consideriamo sottomatrice 3×3 che contenga solo a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & a & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 4a - 10 - 10a - 24 = -6a - 34$$

Se $a \neq -\frac{17}{3}$, allora di sicuro $\text{rango} = 3$.

Stessa cosa con b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & b & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 28 + 6b - 70 + b = 7b - 42$$

Se $b \neq 6$, allora di sicuro $\text{rango} = 3$.

L'unico caso in cui può essere $\text{Rango} = 2$ è se

$$a = -\frac{17}{3} \text{ e } b = 6$$

In questo caso il rango è davvero 2.

Burocraticamente dovei controllare i $\text{Det } 3 \times 3$. In realtà bastano i due che abbiamo già fatto.

Infatti

→ La 1^a e 4^a colonna sono lin. indep.

→ La 2^a colonna è comb. lin. di 1^a e 4^a (Primo $\text{Det} = 0$ se $a = -\frac{17}{3}$)

→ La 3^a colonna " " " " " (secondo $\text{Det} = 0$ se $b = 6$)

Quindi $\text{Span}(\text{colonne}) = \text{Span}(1^{\text{a}} \text{ e } 4^{\text{a}} \text{ colonna})$

Esercizio 2 Dimostrare che esiste unica appl. lin. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 v_1 w_1 v_2 w_2

Basta controllare che $\{v_1, v_2\}$ siano una base di $\mathbb{R}^2$. A quel punto il tes. di struttura assicura esistenza e unicità.

Controllo che siano base.

All'antica Impongo $av_1 + bv_2 = 0$ e spero di ottenere $a=b=0$.

Alla moderna $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\text{Det} = -13 \neq 0 \Rightarrow$ sono una base

Scrivere matrice associata ad f usando in partenza ed arrivo la base canonica

1° modo: uso la definizione Devo calcolare $f(1,0)$ e $f(0,1)$
Quelli che otterrò di uso come colonne.

Come calcolo $f(1,0)$?

Scrivo $(1,0) = a \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\uparrow$ $\uparrow$
 v_1 v_2

Trova a e b e poi calcolo $f(1,0) = aw_1 + bw_2 = 1^a \text{ colonna}$
Stessa cosa per $f(0,1)$

2° modo: brevino La matrice sarà $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Impongo le condizioni del testo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 w_1 w_2

$$\begin{cases} -a + 3b = 1 \\ -c + 3d = 2 \\ 2a + 7b = 1 \\ 2c + 7d = 3 \end{cases} \quad \leadsto \text{trovo } a, b, c, d.$$

3° modo: con i cambi di base Considero la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} f(v_1) \\ f(v_2) \end{matrix}$$

Questa matrice rappresenta f dalla $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

(Verifica tra di voi: se do in input $(1,0)$ $\leadsto$ comp. di v_1 risp. $\{v_1, v_2\}$
 ottengo in output $(1,2)$ $\leadsto$ comp. di $f(v_1)$ risp. $\{e_1, e_2\}$)

Mi serve il cambio di base dalla $\{e_1, e_2\}$ alla $\{v_1, v_2\}$. Osservo che

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice che fa il cambio da } \{v_1, v_2\} \text{ a } \{e_1, e_2\}.$$

Quindi mi serve la sua inversa

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Alla fine la matrice richiesta è

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Basta fare il prodotto}$$

$\uparrow$ Prende componenti di un vettore rispetto alla canonica e restituisce comp. rispetto alla $\{v_1, v_2\}$

$\uparrow$ prende le comp. di v risp. alla $\{v_1, v_2\}$ e restituisce le componenti di $f(v)$ risp. alla $\{e_1, e_2\}$

4° metodo: metodo RAPUANO

$$f(-1, 3) = (1, 2)$$

$$f(2, 7) = (1, 3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Lavoro alla Gauss fino ad avere Id a sx

Ciò che ritrovo a dx è la trasposta di quello che è richiesto !!

Perché funziona? Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ragionando come nel 3° modo sappiamo che la risposta è

$$A \cdot M^{-1}$$

La matrice di Rapuano è $(M^t | A^t)$. Quando lavoriamo

alla Gauss otteniamo

$$(RM^t | RA^t)$$

Se a sx c'è l'identità, allora $R = (M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$.

Ma allora a dx c'è

$$RA^t = (M^{-1})^t A^t = (AM^{-1})^t = \text{trasposta di quella che serviva.}$$

Esercizio 3 Consideriamo l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori di a si ha

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$

Comunque lo si veda, si tratta di imporre $\text{Det} \neq 0$
 (se $\text{Det} \neq 0$, allora le colonne sono lin. indip., d'altra parte
 $\text{Im}(f) = \text{Span}(\text{colonne})$)

$$\text{Det} = 9a + 84 + 96 - 21a - 72 - 48 \neq 0.$$

Cosa succede quando $\text{Det} = 0$. Cosa possiamo dire di $\ker$ e Im ?

In questo caso

→ $\text{Im}(f)$ ha dimensione 2 (la 1ª e 3ª colonna sono lin. indip.)

Visto che 1ª e 3ª colonna sono una base dell'immagine, ma
 lo sono anche 1ª e 2ª

Nota bene: anche la 1ª e 2ª colonna sono sempre lin. indip.,
 qualunque sia il valore di a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & a \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} \neq 0$ sempre

→ $\ker(f)$ ha dimensione 1.

Come trovo una base di $\ker(f)$?

Risolve $Ax = 0$, dove A è la matrice 3×3 data.

$$\begin{array}{ccc} - & 0 & - \\ & 0 & - \end{array}$$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 30

Note Title

05/11/2021

Esercizio 1 Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Consideriamo l'applicazione

$$p(x) \rightarrow p(2x) + p(3)x$$

Verifica tranquilla che l'applicazione è lineare.

1 - Determinare Ker e Im

2 - Scrivere matrice associata usando in partenza ed arrivo la base

$$\{x-1, x^2+2, x^2-x\}$$

Scriviamo $p(x) = a + bx + cx^2$. Allora

$$p(2x) = a + 2bx + 4cx^2$$

$$p(3) = (a + 3b + 9c)$$

$$\begin{aligned} p(2x) + p(3)x &= \underbrace{a + 2bx + 4cx^2}_{p(2x)} + \underbrace{(a + 3b + 9c)x}_{p(3)x} \\ &= a + (a + 5b + 9c)x + 4cx^2 \end{aligned}$$

È come se avessi detto che

$$f(a, b, c) = (a, a + 5b + 9c, 4c)$$

con $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Considero la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{questa è la matrice che prende in INPUT } (a, b, c) \text{ e restituisce } (a, a + 5b + 9c, 4c)$$

Se $\det A \neq 0$, allora l'immagine è tutto lo spazio di arrivo, cioè $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, quindi ha dim 3, quindi Ker è solo il polinomio nullo $\det = 20$, quindi $\neq 0$.

Se volessi calcolare dove finisce x^2-6 , come posso fare?

→ Usando la matrice, calcolo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 4x^2 + 3x - 6$$

→ Usando la formula data $p(2x) + p(3)x$ con $p(x) = x^2 - 6$

$$\downarrow \quad \uparrow$$

$$4x^2 - 6 + 3x = 4x^2 + 3x - 6 \quad \text{!}$$

Seconda domanda: $\underset{v_1}{x-1}, \underset{v_2}{x^2+2}, \underset{v_3}{x^2-x}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$?

All'autica: $a(x-1) + b(x^2+2) + c(x^2-x) = 0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow a=b=c=0$

Moderno

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det = 2 + 1 = 3 $\neq 0$, quindi sono una base

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow e_1 \\ \rightarrow e_2 \\ \rightarrow e_3 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

rappresenta l'applic. dalla $\{e_1, e_2, e_3\}$ alla $\{e_1, e_2, e_3\}$

Cambio di base dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix} = M$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_2 \quad v_3$

La matrice richiesta è

$$M^{-1} A M$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 can. $\rightsquigarrow$ strana $\quad$ can. $\rightsquigarrow$ can. $\quad$ strana $\rightsquigarrow$ canonica

Esercizio 2 Consideriamo il sottospazio

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0 \}$$

e il sottospazio

$$W = \text{span} (1, 6, 1)$$

- ① Trovare una base di V
- ② Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$
- ③ Scrivere le matrici che (usando la canonica in part. ed arrivo) rappresentano le proiezioni su V e W .

- ① Devo risolvere $x - y + 3z = 0$ Volevo ho y e z come param. liberi.
Volevo vedo anche a occhio che una base è

$$(1, 1, 0) \quad (-3, 0, 1)$$

(sono due, sono solus., sono lin. indep.)

La prima settimana avevamo scritto

$$z = t, \quad y = s, \quad x = y - 3z = s - 3t$$

$$(x, y, z) = (s - 3t, s, t) = s(1, 1, 0) + t(-3, 0, 1)$$

- ② Basta osservare che $V + W = \mathbb{R}^3$, cioè che

$$(1, 1, 0) \quad (-3, 0, 1) \quad (1, 6, 1) \leftarrow \text{generatori di } V + W$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det \neq 0$$

Grassmann

$$\dim(V \cap W) + \dim(V + W) = \dim V + \dim W$$

↑

3

2

1

per forza è $\{0\}$, quindi la somma è diretta

③ Se $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$, vuol dire che ogni vettore $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{v}}_V + \underbrace{\vec{w}}_W \quad \vec{v} = \text{pr}_V \vec{u} \quad \vec{w} = \text{pr}_W \vec{u}$$

Facile: scrivere le due matrici usando la base

$$\begin{array}{ccc} (1, 1, 0) & (-3, 0, 1) & (1, 6, 1) \\ v_1 & v_2 & w \end{array}$$

Scriviamo pr_V . Avremo

$$\begin{aligned} \text{pr}_V(v_1) &= v_1 \\ \text{pr}_V(v_2) &= v_2 \\ \text{pr}_V(w) &= 0 \end{aligned} \quad P_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{pr}_V \text{ dalla} \\ \text{strada alla} \\ \text{strada} \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{pr}_V(v_1) & \text{pr}_V(v_2) & \text{pr}_V(v_3) \end{array}$

Analogamente

$$\begin{aligned} \text{pr}_W(v_1) &= 0 \\ \text{pr}_W(v_2) &= 0 \\ \text{pr}_W(w) &= w \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{pr}_W \text{ dalla strada} \\ \text{alla strada} \end{array}$$

Chi è $\ker(\text{pr}_V)$? È W Chi è $\text{Im}(\text{pr}_V)$? V

Come trovo le matrici dalla canonica alla canonica?

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M \rightsquigarrow \text{cambio base dalla } \{v_1, v_2, w\} \text{ alla canonica}$$

$$M P_V M^{-1}$$

proiezione su V dalla
canonica alla
canonica

IDEM per pr_W .

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 31

Note Title

09/11/2021

- Basi ORTOGONALI
- Basi ORTONORMALI
- Algoritmo di GRAM-SCHMIDT

Def. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice

- ORTOGONALE se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ se $i \neq j$
- ORTONORMALE se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad \leftarrow \text{sono ortogonali}$$

La seconda richiesta è equivalente a chiedere che $\|v_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$

Esempio banale La base canonica è ortonormale.

Prop. Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ dei vettori in $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali, cioè $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$.

Allora per forza sono una base (se sono anche non nulli).

Dim. Essendo n , basta far vedere che sono lin. indep.

Supponiamo che $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$.

Facendo il prod. scalare con un certo v_i troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + c_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle \\ &= c_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} \quad \rightsquigarrow \text{per forza } c_i = 0 \text{ e questo vale per ogni } i \end{aligned}$$

↑
si salva solo un termine

— 0 — 0 —

Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_m\}$ siano una base ORTOGONALE di $\mathbb{R}^n$.

Come calcolo le componenti di un certo $v \in \mathbb{R}^n$ rispetto a questa base?

Metodo banale Scrivo $v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$ e risolvo il sistema lineare per trovare $c_1, \dots, c_m$

Sfrutto l'ortogonalità Suppongo di sapere che

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

e faccio il prod. scalare con v_i . Ottengo

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_m v_m, v_i \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_m \langle v_m, v_i \rangle \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \end{aligned}$$

↑ si salva solo un termine

Ma allora

$$c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

Invece di risolvere un sistema lineare, calcolo 2 prodotti scalari

Se so in aggiunta che la base è **ortonormale** allora

$$c_i = \langle v, v_i \rangle$$

FATTO IMPORTANTE

Le comp. di un vettore rispetto ad una base ortonormale si calcolano facendo un prodotto scalare.

Se la base è solo ortogonale, allora ne servono due.

— o — o —

Come ottengo basi ortogonali / ortonormali?

Risposta: con l'algoritmo di GRAM-SCHMIDT (GS)

Data una base qualsunque $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, allora esiste una base ortogonale $\{w_1, \dots, w_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Primo passo Poniamo $w_1 = v_1$ $\vec{0}$

Secondo passo Poniamo $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$
 $\uparrow$
 numero $\uparrow$ v_1

Si vede facilmente che $\text{Span}\{v_1, v_2\} = \text{Span}\{w_1, w_2\}$ poiché w_2 è comb. lin. di v_1 e v_2 .

Inoltre dico che $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$. Basta fare il conto

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= \langle w_1, v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 \rangle \\ &= \langle w_1, v_2 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Perché funziona? Scriviamo $w_2 = v_2 + \alpha w_1$. Quanto deve valere α affinché w_2 e w_1 siano ortogonali?

$$0 = \langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 + \alpha w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + \alpha \langle w_1, w_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha = - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$$

Terzo passo Poniamo

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

NB: w_3 è comb.

Lin. di v_3, v_2, v_1

Perché funziona? Prendiamo $w_3 = v_3 + \alpha w_1 + \beta w_2$ e cerchiamo α e β in modo che sia ortogonale ai 2 precedenti.

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_3, w_1 \rangle &= \langle v_3 + \alpha w_1 + \beta w_2, w_1 \rangle \\ &= \langle v_3, w_1 \rangle + \alpha \langle w_1, w_1 \rangle + \beta \langle w_2, w_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$$

Allo stesso modo troviamo β .

Passo k Otteniamo qualcosa del tipo

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

Esempio 1 Applichiamo in $\mathbb{R}^2$ partendo da

$$v_1 = (1, 5) \quad v_2 = (1, 1)$$

$$w_1 = v_1 = (1, 5)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1, 1) - \frac{6}{26} (1, 5)$$

$$= (1, 1) - \left(\frac{3}{13}, \frac{15}{13} \right) = \left(\frac{10}{13}, -\frac{2}{13} \right)$$

w_1, w_2 sono base ORTOGONALE (verifica: $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$)

Esempio 2 Applicare in $\mathbb{R}^3$ partendo da

$$v_1 = (1, 0, 1)$$

$$v_2 = (1, 2, 3)$$

$$v_3 = (0, -1, 2)$$

[Verificare che siano una base]

$$w_1 = (1, 0, 1)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= (1, 2, 3) - \frac{4}{2} (1, 0, 1) = (1, 2, 3) - 2(1, 0, 1) = (-1, 2, 1)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= (0, -1, 2) - \frac{2}{2} (1, 0, 1) - \frac{0}{6} (-1, 2, 1)$$

$$= (0, -1, 2) - (1, 0, 1) = (-1, -1, 1)$$

Verifica: w_1, w_2, w_3 sono una base ORTOGONALE

Come si trasforma in una base ORTONORMALE?

Basta dividere per la norma. Cioè

Se $v_1, \dots, v_m$ sono una base ORTOGONALE, allora

$\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|}$ sono una base ORTONORMALE

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\hat{w}_1} \quad \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}_{\hat{w}_2} \quad \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\hat{w}_3}$$

Chi è la componente di $(1, 5, 0)$ rispetto a $\hat{w}_2$?

$$\text{È il prodotto scalare, cioè } \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{10}{\sqrt{6}}}_{= 0} = \frac{9}{\sqrt{6}} \quad \ddot{\circ}$$

ALGEBRA LINEARE ~ LEZIONE 32

Note Title

09/11/2021

→ ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO

→ PROIEZIONE ORTOGONALE

Def. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale.Si dice ortogonale di V l'insieme

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$$

↑
vettori che sono $\perp$ a tutti
i vettori di V

Prop. $V^\perp$ è un s.sp. vettoriale di $\mathbb{R}^n$.Dim. Se $\langle w_1, v \rangle = 0$ e $\langle w_2, v \rangle = 0$, allora $\langle w_1 + w_2, v \rangle = 0$

Analogamente

se $\langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$, allora $\langle aw, v \rangle = a \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$
e quindi anche $aw \in V^\perp$

Teorema Sia V un sottosp. vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$$

somma diretta
ortogonale, cioè tutti i vettori del
primo s.sp. sono $\perp$ a tutti i vettori del secondo

Dim. Ci sono 2 cose da dimostrarePrimo: $V \cap V^\perp = \{0\}$ Supponiamo che $v \in V$ e $v \in V^\perp$. Ma allora $\langle v, v \rangle = 0$ (dove essere ortogonale a se stesso)il che può accadere solo se $v = 0$.

$$\text{Secondo: } V + V^\perp = \mathbb{R}^n$$

Detto altrimenti, devo dimostrare che ogni $u \in \mathbb{R}^n$ si scrive come

$$u = v + w$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\in V \quad \in V^\perp$

Prendiamo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di V . Completiamola ad una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

Applicando GS troviamo una base ortogonale $\{w_1, \dots, w_n\}$ di $\mathbb{R}^n$.

Ora sappiamo che

$$\text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = V$$

Ogni $u \in \mathbb{R}^n$ lo possiamo scrivere come

$$u = \underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_k w_k}_{\in V} + \underbrace{c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n}_{\substack{\text{ci piacerebbe che questo} \\ \text{stesse in } V^\perp}}$$

Poiché i w_i sono una base ortogonale, allora il prodotto scalare tra

$$c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n$$

con una qualunque comb. lin. di $w_1, \dots, w_k$ fa sempre 0, perché in tutti i termini compare qualcosa del tipo

$$\langle w_i, w_j \rangle$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 primi $k \quad \quad$ da $k+1$ in poi
 — 0 — 0 —

FATTO GENERALE Dato V s.sp. di $\mathbb{R}^n$, è univocamente determinato un s.sp. W t.c.

$$\mathbb{R}^n = V \oplus W$$

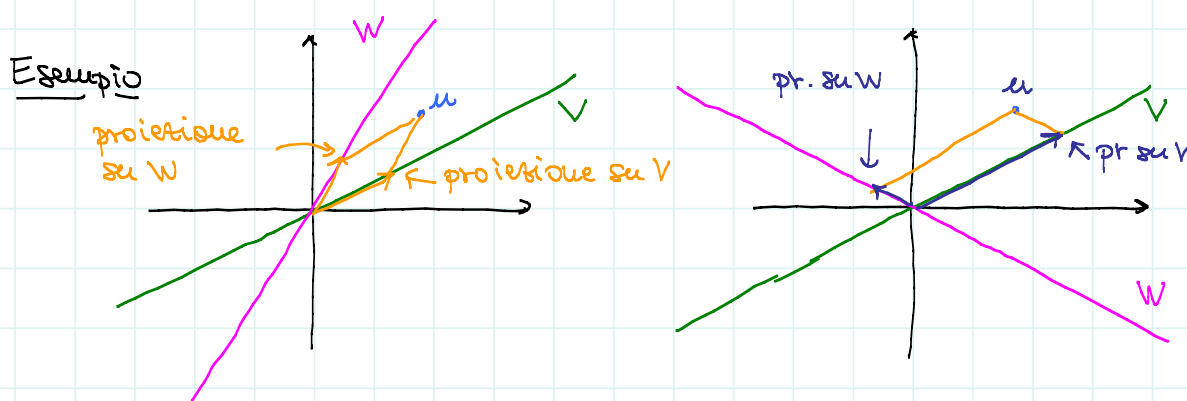
$$e \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \text{ e } \forall w \in W \quad (\text{ovviamente } W = V^\perp).$$

Def. Dato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ s.sp. vettoriale, e dato $u \in \mathbb{R}^n$, si dice proiezione ortogonale di u su V la componente di u rispetto alla somma diretta

$$V \oplus V^\perp$$

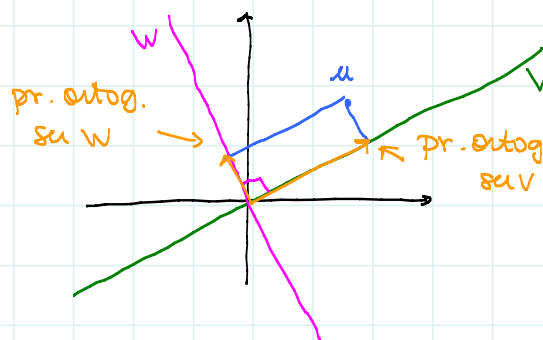
Oss. Se non preciso "ortogonale", non ha senso chiedere la proiezione di u su un certo s.sp. V .

Ha senso solo se preciso una somma diretta $V \oplus W$



Se lascio lo stesso V , ma cambio W , la proiezione cambia!

Quando preciso proiezione ortogonale allora W si intende che è $V^\perp$



Come si calcolano le proiezioni (ortogonali o no)

Scrivo una base $u_1, \dots, u_k$ di V e una base $w_{k+1}, \dots, w_m$ di W

A questo punto ogni vettore u si scrive come

$$u = \underbrace{c_1 u_1 + \dots + c_k u_k}_{\in V} + \underbrace{c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_m w_m}_{\in W}$$

Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$$

Calcolare la proiezione ortogonale su V del vettore $(1, 1, 1)$

① Mi procuro una base di V , ad esempio risolvendo il "sistema"

$$v_1 = (-2, 1, 0)$$

$$v_2 = (3, 0, 1)$$

② Rendiamola ortogonale

$$w_1 = (-2, 1, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= (3, 0, 1) - \frac{-6}{5} (-2, 1, 0)$$

$$= (3, 0, 1) + \frac{6}{5} (-2, 1, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1\right)$$

Volevo posso anche togliere le frazioni usando

$$w_1 = (-2, 1, 0)$$

$$e \quad w_2 = (3, 6, 5)$$

[Verifica: sono ortogonali e stanno nel piano].

③ La completo ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Ci sono vari metodi

3.1 $\rightarrow$ La completo ad una base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio aggiungendo

$(1, 0, 0)$ (verifica che sono una base) e poi applico GS

3.2 $\rightarrow$ Uso la formula ex-misteriosa a partire da w_1 e w_2

3.3 $\rightarrow$ uso il vettore dei coeff. del piano, cioè $(1, 2, -3) = w_3$

④ Scriviamo $(1, 1, 1) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3$

$\uparrow$ proiezione ortogonale su V

Per calcolare c_1 e c_2 uso la formula per le basi ortogonali

$$c_1 = \frac{\langle u, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{-1}{5}$$

$$c_2 = \frac{\langle u, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{14}{70} = \frac{1}{5}$$

Quindi la proiezione su V è

$$-\frac{1}{5}(-2, 1, 0) + \frac{1}{5}(3, 6, 5) = (1, 1, 1)$$

BRAVO FURBO! Ho riscoperto che il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a V , quindi chiaramente è la proiezione di se stesso.

Lo stesso procedimento funzionava partendo da un qualunque u .

Domanda finale: ottenuta la proiezione risp. a V (ortogonale), come ottengo quella rispetto a $V^\perp$?

1° modo: stesso procedimento usando le componenti rispetto ai vettori della base che stanno in $V^\perp$

2° modo: faccio la differenza (la somma delle 2 proiezioni deve fare u).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 33

Note Title

09/11/2021

MATRICI ORTOGONALIProp. Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata).

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

(i) le righe di A sono una base ORTONORMALE(ii) le colonne di A sono una " "(iii) $A^{-1} = A^t$, cioè $A \cdot A^t = A^t \cdot A = Id$ Def. La matrice A si dice ortogonale se verifica una qualunque delle proprietà precedenti, e quindi le verifica tutte.Dim. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Sia $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \leftarrow$ varie righe

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_m \end{pmatrix}$$

Quando calcolo il prodotto righe per colonne, quelle che trovo al posto i, j è proprio

$$\langle R_i, R_j \rangle$$

e quindi viene la matrice identica se e solo se le righe sono ortonormali

$$\text{(ii) } \Leftrightarrow \text{(iii)} \quad A^t \cdot A = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{pmatrix}$$

Vista così in posizione i, j troviamo $\langle C_i, C_j \rangle$

e quindi viene la matrice identica se e solo se le colonne sono ortonormali.

Proprietà classiche delle matrici ortogonali

(1) Se A è ortogonale, allora $\det(A) = \pm 1$, quindi in particolare è $\neq 0$ e A è invertibile

Se $A \cdot A^t = Id$, allora per BINET

$$\det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = \det(Id) = 1$$

$\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \det(A)$

$$\leadsto [\det(A)]^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \det(A) = \pm 1$$

(2) Se A e B sono ortogonali della stessa dim., allora $A \cdot B$ è ancora ortogonale

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t$$

$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{prop. inversa} \quad \text{ortog.} \quad \text{prop. trasposta}$

Quindi $(AB)^{-1} = (AB)^t$, cioè AB è ortogonale

(3) Se A è ortogonale, allora A^t e A^{-1} sono ortogonali

Infatti coincidono, e poi le righe di A diventano le colonne di A^t .

Achtung! Se A e B sono ortogonali, allora $A+B$ non è detto che sia ortogonale.

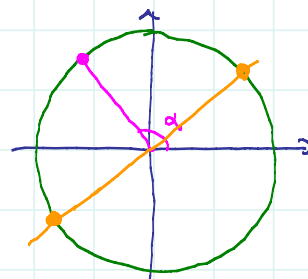
Bisogna fare un esempio!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sono ortogonali, ma la loro somma non lo è.}$$

Esercizio Come sono fatte TUTTE le matrici 2×2 ortogonali

Sappiamo, per esempio, che le righe devono essere ortonormali. Quindi la prima riga deve essere un vettore di norma 1, quindi che sta sulla circonferenza trigonometrica, cioè del tipo

$$\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad \leftarrow \text{prima riga}$$



La seconda riga deve essere ancora di norma 1 e perpendicolare alla prima riga.

Ci sono quindi solo 2 possibilità,

corrispondenti a angoli $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$

Calcolando $\sin$ e $\cos$ di questi due angoli troviamo le due possibili matrici

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \\ \text{Det} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \\ \text{Det} = -1$$

Esempio Costruire una matrice 3×3 ortogonale

Partiamo da una base qualunque di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 1)$$

$$v_2 = (2, 1, 3)$$

$$v_3 = (0, 1, 0)$$

[Verifica!]

Trasformiamola in una base ORTOGONALE con GS almeno all'inizio

$$w_1 = (1, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} w_2 &= (2, 1, 3) - \frac{\langle (2, 1, 3), (1, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle} (1, 0, 1) = (2, 1, 3) - \frac{5}{2} (1, 0, 1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Togliamo le frazioni e prendiamo $w_2 = (-1, 2, 1)$

Produciamo w_3 con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = (-2, -2, 2)$$

Togliendo i due otteniamo la base

$$w_1 = (1, 0, 1)$$

$$w_2 = (-1, 2, 1)$$

$$w_3 = (1, 1, -1)$$

Se li dividiamo per la norma diventano una base ortonormale

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow \text{matrice ORTOGONALE } 3 \times 3$$

(la sua inversa è la trasposta:
provarne per credere!)

Oss. Se voglio fare l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

basta osservare che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se moltiplico la 1ª riga per $\frac{1}{3}$, la seconda per $\frac{1}{5}$, e la terza per $\frac{1}{3}$ il prodotto viene l'identità. Quindi l'inversa è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$V = \{ (x, y, z, w) : x+y-z=0, y+z+w=0 \}$$

Scrivere la proiezione ortogonale su V del vettore $(1, 1, 1, 1)$

① Mi procuro una base di V

$$v_1 = (2, -1, 1, 0)$$

$$v_2 = (1, -1, 0, 1)$$

② Ortogonalizzo con GS

$$w_1 = (2, -1, 1, 0)$$

$$w_2 = (1, -1, 0, 1) - \frac{3}{6} (2, -1, 1, 0)$$

$$= (1, -1, 0, 1) - \frac{1}{2} (2, -1, 1, 0) = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$$

o ancora meglio $(0, 1, 1, -2)$

Verifica

③ Scrivo $(1, 1, 1, 1) = \underbrace{C_1 w_1 + C_2 w_2}_{\text{proiezione su } V} + C_3 w_3 + C_4 w_4$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{perp. ai prec.}$

④ Basta calcolare $C_1 = \frac{\langle u, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \quad C_2 = \frac{\langle u, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}$
 $\quad \quad \quad \text{--- } 0 \quad \text{--- } 0 \quad \text{---}$

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 34

Note Title

12/11/2021

FORME CANONICHE

Primo caso

Domanda (in termini di applicazioni). Sia data $f: V \rightarrow W$ lineare, con V e W spazi vettoriali.

Scegliendo bene una base di V e una base di W , posso rendere la matrice associata ad f particolarmente bella / semplice?

Domanda (in termini di matrici) Sia data A matrice $n \times m$.

Posso trovare una matrice $M \in M_{m \times m}$ e $N \in M_{n \times n}$ invertibili tali che

$$N^{-1} A M \quad (\text{le dimensioni permettono di calcolare il prodotto})$$

sia particolarmente bella / semplice.

Perché sono collegate? Supponiamo che

- V ha dimensione m e sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base
- W ha dimensione n e sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base
- sia $A \in M_{n \times m}$ la matrice associata ad f con queste basi.

Se ora considero

- una nuova base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ di V
- " " " $\{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n\}$ di W

come diventa la matrice tra queste nuove basi?

Basta considerare le matrici di cambio di base. Siano

- M la matrice che cambia base in V dalla nuova alla vecchia
(le colonne di M sono le componenti di $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m$ risp. ai $v_1, \dots, v_m$)
- N la matrice che cambia base in W dalla nuova alla vecchia
(le colonne di N sono le componenti di $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n$ risp. ai $w_1, \dots, w_n$)

Allora la nuova matrice $\hat{A}$ sarà

$$\hat{A} = N^{-1} A M$$

↑ prende comp. di v rispetto a $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m$
e restituisce comp. di v risp. a $v_1, \dots, v_m$
prende comp. di v risp. a $v_1, \dots, v_m$
e restituisce comp. di $f(v)$ risp. a $w_1, \dots, w_m$
prende comp. di $f(v)$ risp. alla $w_1, \dots, w_m$
e restituisce comp. di $f(v)$ risp. alla $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m$

Teorema (Per le applic. lineari)

Supponiamo $f: V \rightarrow W$ lineare, e sia $r = \dim(\text{Im}(f))$.

Allora scegliendo bene le basi la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(un blocco 1×2 con 2'identifi
ed il resto tutti 0)

Teorema (Per le matrici)

Supponiamo $A \in M_{m \times n}$, e sia $r = \text{rank}(A)$.

Allora esistono matrici invertibili $M \in M_{m \times m}$ ed $N \in M_{n \times n}$ t.c.

$$N^{-1} A M = \text{matrice come quella di sopra,}$$

Conclusione: tutto dipende solo dal rango.

Più in generale: date due matrici $n \times n$ con lo stesso rango r , possiamo dire che queste rappresentano la stessa applicazione, solo scritta in due basi diverse.

Domanda operativa? Come trovo le 2 basi speciali, o equivalentemente come trovo M ed N ?

Risposta: ripercorrendo la dimostrazione del rank-nullity

$$\dim_{\substack{\text{"} \\ K}} \ker(f) + \dim_{\substack{\text{"} \\ L}} \operatorname{Im}(f) = \dim_{\substack{\text{"} \\ M}} V$$

Prendiamo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\ker(f)$

Completiamola ad una base di V aggiungendo $\{v'_1, \dots, v'_r\}$.

In questo modo $\{v'_1, \dots, v'_r, v_1, \dots, v_k\}$ è una base di V .

Consideriamo

$$w_1 = f(v'_1) \quad \dots \quad w_r = f(v'_r)$$

e completiamola in qualche modo fino ad avere una base di W .

Come è fatta la matrice usando queste basi?

È proprio la matrice che volevo.

$$\begin{array}{l} w_1 \rightarrow \\ w_2 \rightarrow \\ w_r \rightarrow \\ w_{r+1} \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $f(v'_1) \quad f(v'_2) \quad f(v_1) \quad \dots \quad f(v_k)$

— 0 — 0 —

Algoritmo per trovare le basi

- In partenza (V) gli ultimi k sono una base del $\ker$ e i primi r sono qualunque cosa che la completa.
- In arrivo (W) i primi r sono f dei primi r el. della base di V ed il resto è qualunque cosa che la completa.

— 0 — 0 —

Esempio Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ha chiaramente rango 2. Trovare M ed N t.c.

$$N^{-1} A M = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Cerco in partenza $(\mathbb{R}^4)$ una base del $\ker$, che ha dimensione 2.

Volevo posso risolvere il sistema $A\vec{x} = \vec{0}$.

In questo caso si vede a occhio che una base è

$$v_3 = (1, 0, -1, 0)$$

$$v_4 = (0, 1, 0, -1)$$

(è come fare $C_1 - C_3$)

(è come fare $C_2 - C_4$)

Completiamo la base del $\ker$ aggiungendo due vettori opportuni, ad esempio

$$v_1 = (0, 1, 0, 0)$$

$$v_2 = (0, 0, 1, 0)$$

Per controllare che siano una base, basta fare il $\det$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

← Matrice con $\det \neq 0$

Quindi la matrice M è la matrice che li ha come colonne

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Passiamo in arrivo. Allora

$$w_1 = f(v_1) = (4, 1, 4)$$

$$w_2 = f(v_2) = (1, 4, 1)$$

e la posso completare aggiungendo ad esempio $(1, 0, 0)$.

Conclusione: la matrice N è quella che li ha come colonne, cioè

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica da fare

$$N^{-1} A M = \text{matrice semplice richiesta}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 35

Note Title

12/11/2021

Seconda Domanda (in termini di applicazioni)

stesso spazio

Sia $f: V \rightarrow V$ lineare, con V sp. vett.Possiamo scegliere una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ di V in modo che

USANDO LA STESSA BASE IN PARTENZA ED ARRIVO

la matrice sia bella / semplice?

Seconda domanda (in termini di matrici)

Sia $A \in M_{m \times m}$ (sempre quadrata). Voglio trovare $M \in M_{m \times m}$ invertibile tale che

$$M^{-1} A M$$

← stessa M

sia bella / semplice

Esempio motivazionale

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ → Calcolare A^{2021} → Trovare B matrice 2×2 t.c. $B^{16} = A$.

In questo momento sembra impossibile in poco tempo.

Proviamo ad ottenere matrici diagonali che sono comode.

Cosa vuol dire che una applicazione ha matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \vdots \\ \leftarrow v_m \end{matrix}$$

↑ ↑ ↑
 $f(v_1)$ $f(v_2)$... $f(v_m)$

Deve essere $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ $f(v_2) = \lambda_2 v_2$ $\vdots$ $f(v_m) = \lambda_m v_m$

Definizione (per le applic. lin.)

Sia V uno sp. vett. e sia $f: V \rightarrow V$ una applic. lineare

- Si dice che un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è **AUTOVALORE** per f se esiste $v \in V$ con $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$
- Se λ è autovalore, tutti i $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$ si dicono **AUTOVETTORI** relativi a λ
- Si dice **autospatio** di λ l'insieme di tutti i vettori $v \in V$, compreso lo 0, tali che $f(v) = \lambda v$.

Oss. La precisazione $v \neq 0$ nella def. di autovalore è essenziale perché se potessi usare $v = 0$, allora ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sarebbe autovalore

Nota Linguistica

AUTOVALORE = EIGENVALUE

" VETTORE = EIGENVECTOR

" SPAZI = EIGENSPACE

Def. (per le matrici). Se

$$Av = \lambda v \quad \text{e} \quad v \neq 0$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 autovale autovettore

Prop. Se λ è un autovalore di f , allora il corrispondente autospatio è un s.sp. vett. di V

Dim. Se $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$, allora

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

quindi $v_1 + v_2 \in$ autospatio di λ .

Se $f(v) = \lambda v$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $f(av) = af(v) = a\lambda v = \lambda(av)$, quindi $av \in$ autospatio di λ .

Come trovo gli autovalori di una applicazione o matrice?

Prop. Sia A una matrice $n \times n$. Allora
 λ è autovalore di A se e solo se $\text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = 0$

Dim. λ autovalore di $A \Leftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $Av = \lambda v$
 $\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $Av - \lambda v = 0$
 $\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $(A - \lambda \text{Id})v = 0$
 $\Leftrightarrow \ker(A - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$ (contiene $v \neq 0$)
 $\Leftrightarrow \text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = 0$.

Esempio Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Calcoliamo autovalori, autovettori, autospazi

$$A - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{tolgo } \lambda \text{ agli el. sulla diagonale})$$

$$\text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = (2-\lambda)(6-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 3) = 0$$

Le soluzioni dell'equazione sono $\lambda = 3$ e $\lambda = 5 \leftarrow$ autovalori
 Calcolo autovettori / autospazi

$\lambda = 3$ Cerco i vettori che vanno in 3 volte se stessi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x + y = 3x \\ -3x + 6y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{5. inutile}$$

Il sistema ha infinite soluzioni (doveva succedere). Le soluzioni sono

$\text{Span}((1,1))$ $t(1,1) \leftarrow$ per $t \neq 0$ sono tutti autovettori
 $\uparrow$ Autospazio

$\lambda = 5$ Cerco i vettori che vanno in 5 volte se stessi. Come prima

$$\begin{cases} 2x + y = 5x \\ -3x + 6y = 5y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \leftarrow \text{INUTILE}$$

$$\text{Autospazio} = \text{Span}((1, 3))$$

Conclusione: gli autovalori sono

$$\lambda = 3 \quad \text{con autospazio } \text{span}((1, 1))$$

$$\lambda = 5 \quad \text{con autospazio } \text{span}((1, 3))$$

Nell'esempio di prima consideriamo la base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$v_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad v_2 = (1, 3)$$

In questa base la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\neq(v_1) \quad \neq(v_2)$

In termini di cambio di base, consideriamo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D$$

Verifica: $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} A M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ora
$$\begin{aligned} D \cdot D &= (M^{-1} A M) (M^{-1} A M) \\ &= M^{-1} A \cancel{M M^{-1}} A M \\ &= M^{-1} A^2 M \end{aligned}$$

$$D \cdot D \cdot D = M^{-1} A \cancel{M} \cdot M^{-1} A \cancel{M} \cdot M^{-1} A M = M^{-1} A^3 M$$

e analogamente

$$D^{2021} = M^{-1} A^{2021} M$$

da cui (devo moltip. a sx per M e a dx per M^{-1})

$$\begin{aligned} A^{2021} &= M D^{2021} M^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{2021} & 0 \\ 0 & 5^{2021} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e in questo modo ho calcolato A^{2021}

Questa procedura si chiama **DIAGONALIZZARE** A , cioè trovare M e D tali che

$$M^{-1} A M = D.$$

↑ nelle colonne ci sono gli autovettori
↑ sulla diagonale ci sono gli autovalori

Oss. Quando so che λ è autovalore di A , per trovare gli autovettori e l'autospazio basta calcolare il

$$\text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$$

invece che impostare $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

- LEZIONE 36

Note Title

16/11/2021

Lunga parentesi sui polinomi

Un polinomio si scrive nella forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 coeff. del polinomio e sono
 numeri (interi, razionali, reali, COMPLESSI)

Si intende che $a_n \neq 0$ e n si dice GRADO del polinomio.

Il polinomio si dice MONICO se $a_n = 1$.

Def. Un numero (reale o complesso) α si dice RADICE del polinomio se

$$p(\alpha) = 0$$

Teorema di Ruffini Se α è RADICE del polinomio $p(x)$, allora

$$p(x) = (x - \alpha) q(x)$$

$\uparrow$
 polinomio di grado $n-1$
 se $p(x)$ ha grado n

TEOREMA MISTERIOSO (Teo. fondamentale dell'algebra)

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. complessi (se sono interi o reali, ancora meglio) di grado ≥ 1 .

Allora $p(x)$ ammette almeno una radice COMPLESSA, cioè esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $p(\alpha) = 0$.

Oss. Se anche i coeff. di $p(x)$ sono tutti reali o interi, la radice può comunque essere complessi.

(Pensare a $p(x) = x^2 + 1$)

Def. (Moltiplicità di una radice)

Sia α una radice di $p(x)$. Si dice **MOLTEPLICITÀ** di α il più grande intero m tale che $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^m$ ($m \geq 1$ per il teorema di Ruffini)

Oss. Se m è la molteplicità di α , allora

$$p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$$

$\uparrow$ grado m $\uparrow$ polinomio di grado $n-m$
 tale $q(\alpha) \neq 0$

$\uparrow$
 se fosse $q(\alpha) = 0$, allora per Ruffini avremmo $q(x) = (x-\alpha)r(x)$ e quindi avrei un altro fattore $(x-\alpha)$

Oss. (da corso di Analisi) Se α è radice di molteplicità m , allora

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad p^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

(si annullano le prime $m-1$ derivate di $p(x)$ in $x=\alpha$, ma non la m -esima).

Teorema importante (Conseguenza del teo. fondamentale)

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. complessi (se sono reali, meglio) di grado $n \geq 1$.

Allora $p(x)$ ha esattamente n radici, pm di contarle con la loro molteplicità.

$\uparrow$
 COMPLESSE

Dati Le radici sono $\leq n$

Prendiamo le prime n radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, contate con molteplicità. Allora per Ruffini iterato possiamo scrivere

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \cdot \text{numero} \uparrow \text{polinomio di grado 0}$$

Se sostituisco un qualunque altro α non può venire 0, perché è prodotto di termini non nulli.

Le radici sono n Per teo. fond. $p(x)$ ha almeno una radice α_1 , quindi per Ruffini

$$p(x) = (x - \alpha_1) q(x) \quad \uparrow \text{grado } n-1$$

Se $n-1 \geq 2$, allora $q(x)$ ha una radice α_2 , quindi

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) r(x)$$

e così via fino a quando il grado non è esaurito
— 0 — 0 —

SOMMA E PRODOTTO DELLE RADICI

posso sempre assumere che lo sia dividendo

Sia $p(x)$ un polinomio **MONICO** a coeff. complessi.

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le sue radici complesse, contate con molteplicità.

Scriviamo

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Allora

$$\alpha_1 \dots \alpha_n = (-1)^n a_0$$

prod. radici

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -a_{n-1}$$

somma radici

Idea della dim. Sappiamo che

$$p(x) = (x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot \dots \cdot (x-\alpha_n) \cdot 1$$

↑
altrimenti il coeff.
di x^n non torna

Immaginiamo di svolgere il prodotto:

→ il termine noto diventa $(-\alpha_1) \cdot (-\alpha_2) \cdot \dots \cdot (-\alpha_n) = (-1)^n \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$

→ i termini di grado $(n-1)$ si ottengono prendendo x in $n-1$ parentesi e $-\alpha_i$ nella restante. Quindi i termini di grado $n-1$ hanno come coeff. $-\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n$

(Dim. più formale si fa per induzione)

Esempi di grado basso

$$\boxed{n=2} \quad (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

$$\boxed{n=3} \quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

↑
SOMMA

↑
PRODOTTO

— 0 — 0 —

POLINOMIO CARATTERISTICO DI UNA MATRICE

Def. Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata). Il pol. caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id})$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ allora

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2$$

(tolgo λ sulla diagonale)

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 12$$

Proprietà del polinomio caratteristico

- (1) Le radici di $p_A(\lambda)$ sono gli autovalori di A
- (2) Se A è diagonale o triangolare (inferiore o superiore) con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sulla diagonale, allora

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

- (3) Il termine di grado più alto in $p_A(\lambda)$ è $(-1)^n \lambda^n$

- (4) Il termine noto di $p_A(\lambda)$ è $\text{Det}(A)$

- (5) Il coeff. di λ^{n-1} in $p_A(\lambda)$ è $(-1)^{n+1} \text{Traccia}(A)$

Def. La traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale

$$\text{Traccia}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

↑ tizi sulla diagonale

Dim. (1): visto alla lezione 35

(4): Basta sostituire $\lambda=0$

$$\text{termine noto} = p_A(0) = \text{Det}(A - 0 \cdot \text{Id}) = \text{Det}(A)$$

- (2) Se A è triangolare superiore, anche $A - \lambda \text{Id}$ lo è come in figura, e il Det è il prodotto della roba sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & * & & \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & 0 & \lambda_3 - \lambda & \\ & & & \ddots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 37

Note Title

16/11/2021

Back to lezione precedente Idea della dim. dei punti (3) e (5)

(3) Scriviamo $A - \lambda \text{Id}$

Come faccio ad ottenere λ^n
sviluppando il Det?

Devo prendere il prodotto dei termini
sulla diagonale, e quel prodotto
è del tipo

$(-1)^n \lambda^n + \text{roba di grado più basso}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & & \text{numeri} \\ & a_{22}-\lambda & \\ \text{numeri} & & \ddots \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

(5) Anche qui andrebbe fatta per involuzione sulla dimensione.

Domanda: come ottengo termini di grado λ^{n-1} sviluppando il
determinante?

Sviluppiamo rispetto alla prima riga:

$(a_{11}-\lambda) \cdot \text{Det}(\text{prec}) + \underbrace{\text{altri termini tutti di grado } \leq n-2}$

$\uparrow$
perché ho cancellato esattamente
due termini con il λ
 $(-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \lambda^{n-2} \cdot \text{Traccia}(\text{precedente})$

A sono 2 tipi di termini di λ^{n-1} quando faccio il prodotto

$-\lambda \cdot (-1)^{n-2} \lambda^{n-2} \cdot \text{Traccia}(\text{prec}) + (-1)^{n-1} a_{11} \lambda^{n-1}$

Mettendo insieme diventa $\lambda^{n-1} (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \text{Traccia}(\text{prec}))}_{\text{Traccia completa}}$

— o — o —

PROBLEMA DELLA DIAGONALIZZAZIONE

Def. Siano A e B due matrici $n \times n$.

Si dice che B è **SIMILE** ad A se esiste una matrice M invertibile ($n \times n$) tale che

$$B = M^{-1} A M$$

Moralmente: B ed A rappresentano la stessa applicazione in due basi diverse, ed M è la matrice di cambio di base

Diagonalizzazione di applicazioni Data $f: V \rightarrow V$ lineare
↑ stesso spazio

trovare, se esiste, una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che in questa base la matrice di f sia diagonale.

Questo vuol dire che

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_n v_n \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalizzazione di matrici Data A matrice $n \times n$, trovare M matrice invertibile $n \times n$ t.c.

$$M^{-1} A M = D \leftarrow \text{matrice diagonale}$$

In altre parole: trovare una matrice diagonale che sia simile ad A .

Diagonalizzare vuol dire: $\rightarrow$ nel primo caso trovare $v_1, \dots, v_n$
 $\rightarrow$ nel secondo caso trovare M e D

- ① Posso sempre diagonalizzare? **MAGARI!**
- ② Che faccio se non posso diagonalizzare? **JORDAN**
- ③ Come stabilisco se posso diagonalizzare? **QUESTA LEZIONE**

Prop. Siano A e B due matrici simili.
Allora hanno lo stesso polinomio caratteristico

Dim. Sappiamo che $B = M^{-1}AM$. Allora

$$\begin{aligned}
 p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \text{Id}) = \det(M^{-1}AM - \lambda \text{Id}) \\
 &= \det(M^{-1}AM - \lambda M^{-1}M) \\
 &= \det[M^{-1}(A - \lambda \text{Id})M] \\
 \text{(BINET)} \quad &= \underbrace{\det(M^{-1})}_{\det(M)} \det(A - \lambda \text{Id}) \cdot \det(M) \\
 &= \det(A - \lambda \text{Id}) = p_A(\lambda)
 \end{aligned}$$

Oss. Avendo lo stesso pol. caratt., allora in particolare

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \det(B) && \text{(segue anche da BINET)} \\
 \text{Traccia}(A) &= \text{Traccia}(B) && \text{(a meno del segno è il coeff. di } \lambda^{n-1} \text{ nel pol. car.)}
 \end{aligned}$$

autovalori di A = autovalori di B

Def. Sia A una matrice $n \times n$.
 Sia λ un autovalore di A .
 Si definisce

- **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA** di λ la sua molteplicità come radice di $p_A(\lambda)$
- **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA** la dimensione dell'autospazio di λ cioè

$$\dim(\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}) = \dim(\ker(A - \lambda Id))$$

Teorema 1 Per ogni autovalore λ vale che

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

Teorema 2 Sia A una matrice $n \times n$.

Allora A è diagonalizzabile se e solo se

- tutti gli autovalori di A sono reali (cioè tutte le n radici complesse del pol. caratteristico sono in realtà reali)
- per ogni autovalore succede che $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Corollario (Condizione sufficiente, ma non necessaria)

Sia A una matrice $n \times n$.

Supponiamo che gli n autovalori di A siano reali e **DISTINTI**.

Allora A è diagonalizzabile.

Dim Abbiamo n autovalori distinti. Quindi le loro molteplicità sono per forza tutte 1 (la somma delle molteplicità deve fare n). Ma allora tutte le molt. geom. sono 1 e quindi coincidono con le algebriche.

Esempio 1 Questa matrice è diagonalizzabile

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 29 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A$$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda)$ $\leadsto$ le radici sono 1, 2, 7
 $\uparrow$
 triangolare superiore
 reali e distinte $\Rightarrow$ diag.

Quindi A è simile a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = D$$

cioè esiste una matrice M tale che

$$A = M^{-1}DM \quad \text{oppure} \quad MAM^{-1} = D$$

Come trovo M ? Risolvo $Ax = x$ $Ax = 2x$ $Ax = 7x$
 le soluzioni sono la base cercata

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Per quali valori di A è diagonalizzabile?

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Radici $\nearrow \lambda=1$ con $m_a=1$ e quindi anche $m_g=1$
 $\searrow \lambda=2$ con $m_a=2$

Quindi A è diagonalizzabile se e solo se m_g dell'autovalore 2 è 2.
 Quindi se e solo se $\dim(\ker(A-2Id)) = 2$

$$A-2Id = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Questo accade} \Leftrightarrow a=0$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 38

Note Title

16/11/2021

Dim. mult. geom. $\leq$ mult. algebrica

Sia α un autovalore di A . Poniamo $\dim V_\alpha = k$. Devo dimostrare che $P_A(\lambda)$ è divisibile almeno per $(\lambda - \alpha)^k$.

Poiché $\dim V_\alpha = k$, esistono k vettori lin. indip. $v_1, \dots, v_k$ che stanno nell'autospazio cioè tali che

$$Av_1 = \alpha v_1 \quad \dots \quad Av_k = \alpha v_k.$$

Completiamo ad una base aggiungendo $v_{k+1}, \dots, v_n$.

In questa nuova base, come diventa la matrice A ?

$$B = \begin{array}{c|ccc} & \overset{k}{\text{col}} & & & \\ \hline & \begin{matrix} a & 0 & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a \end{matrix} & * & \\ \hline & 0 & & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_k \\ \leftarrow v_{k+1} \dots \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_k \quad v_{k+1} \dots$

B è simile ad A , quindi hanno

$$P_B(\lambda) = P_A(\lambda)$$

$\uparrow$
calcolo

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda \text{Id}) =$$

$$\begin{array}{c|ccc} a-\lambda & & & \\ \hline & a-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a-\lambda \\ \hline & 0 & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ * \\ \\ \end{array}$$

$$= (a-\lambda)(a-\lambda) \dots (a-\lambda) \cdot \text{roba}$$

$$= (a-\lambda)^k \cdot \text{roba}$$

$\uparrow$
quindi è divisibile per $(a-\lambda)$

— o — o —

Lemmma Sia $f: V \rightarrow V$ lineare.

Siano $v_1, \dots, v_m$ autovettori di f corrispondenti ad autovalori distinti.

Allora $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip.

Dim. Supponiamo che non lo siano. Allora ci sono delle relazioni

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

senza che tutti i c_i siano nulli.

Tra tutte quelle possibili, prendiamone una più corta di tutte, e supponiamo (a meno di cambiare i numeri) che coinvolga i primi k vettori

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0 \quad \text{con } c_1, \dots, c_k \text{ tutti } \neq 0.$$

(in generale $k \leq m$). $\uparrow R_1$

Applico f a dx e sx

$$f(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) = f(0) = 0$$

"

$$c_1 f(v_1) + \dots + c_k f(v_k)$$

$$c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k$$

Abbiamo scoperto che anche

$$c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k = 0 \quad R_2$$

Cosa succede se scrivo $\lambda_1 R_1 - R_2$:

$$c_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + c_3 (\lambda_1 - \lambda_3) v_3 + \dots + c_k (\lambda_1 - \lambda_k) v_k = 0$$

Tutti i coeff. sono $\neq 0$ perchè i $c_i \neq 0$ e i λ_i sono tutti diversi.

Quindi avremmo ottenuto una relazione + corta.

— 0 — 0 —

Dim. Teo. di diagonalizzazione

Diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono reali
 $u_g = u_a$ per ogni autovalore

$\Rightarrow$ Se A è diagonalizzabile, allora A è simile a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

Allora il $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$ da cui si vede che tutte le radici sono reali (sono proprio $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$).
 Le molteplicità coincidono perché se una radice compare k volte la sua molt. alg. è k e la dimensione di $\ker(D - \text{radice}I)$ è proprio k (quando sottraggo trovo k colonne di zeri).

$\Leftarrow$ Per ogni autovalore, prendiamo una base dell'autospazio.
 Mettiamo insieme tutti i vettori ottenuti.

Detto meglio: siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti con molteplicità $m_1, \dots, m_k$

Allora $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ (la somma delle molt. alg. è il grado del polinomio)

Ora prendo m_1 vettori che sono base autospazio di λ_1
 (qui uso che le molt. coincidono)
 m_2 vettori che sono base autosp. di λ_2
 e così via.

Così facendo ho preso n vettori che vanno a finire in multipli di se stessi.

Se dimostro che sono una base ho finito.

Dim. che sono lin. indep.

Suppongo che non lo siano. Allora esiste una comb. lin. che fa 0 senza avere tutti i coeff. nulli

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

In questa somma raggruppo tutti i termini che corrispondono allo stesso autovalore.

Otengo $w_1 + \dots + w_k = 0$

↑ ↑

autovettore autovettore

di λ_1 di λ_k

Questo non va bene, perché autovettori con autovalori distinti sono lin. indep.

L'unica possibilità è che $w_1 = w_2 = \dots = w_k = 0$, ma allora devono essere nulli tutti i c_i . Perché?

Ad esempio: w_1 è combinazione lineare degli el. della base dell'autospazio di λ_1 , e quindi tutti i coeff. del blocco di λ_1 devono essere nulli. E così per gli altri.

— 0 — 0 —

Esempio 1 Cosa vuol dire che 0 è autovalore di una matrice?

Vuol dire che esiste $v \neq 0$ t.c. $Av = 0$, quindi

$$\ker(A) \neq \{0\}$$

Quindi $\ker(A)$ = autospazio di 0 e

$$\dim(\ker(A)) = \text{mult. geom. di } 0.$$

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

È diagonalizzabile?

Chi sono autovalori / autovettori?

Risposta: A è simile a

$$\begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi gli autovalori sono

- $\lambda = 21$ con $m_a(21) = m_g(21) = 1$
- $\lambda = 0$ con $m_a(0) = m_g(0) = 2$

Si vede che $\text{Rango}(A) = 1$, quindi $\dim(\ker(A)) = 2$

↪ quindi $\lambda = 0$ è autovalore con $m_g(0) = 2$

La somma degli autovalori è la traccia quindi 21.

Ci sono 3 autovalori: di questi, almeno 2 sono 0 e la somma è 21, quindi sono 0, 0, 21.

A quel punto le molteplicità geometriche e algebriche sono determinate.

Come trovo M tale che $M^{-1}AM = \text{diagonale}$ $\begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix}$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix}$

v_2 e v_3 sono una qualunque base del ker, ad esempio

$$(1, -1, 0) \quad (1, 0, -1)$$

v_1 è un qualunque vettore tale che $Av_1 = 21v_1$

Basta usare $(1, 1, 1)$.

Quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{dalla nuova alla canonica, quindi è } M.$$

[Calcolare inversa e fare verifica!]

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 39

Note Title

19/11/2021

Def Sia V uno spazio vettoriale e sia $f: V \rightarrow V$ lineare.

Si dice che f è **SIMMETRICA** se "uguale nei prodotti scalari" cioè

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall v \in V \quad \forall w \in V$$

Def. Una matrice quadrata A si dice **SIMMETRICA** se

$$A = A^t$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 5 \\ 12 & 5 & -3 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

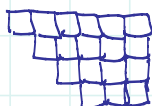
Esempio Da quanti parametri dipende una 3×3 simmetrica?
E una $n \times n$ simmetrica?

$$\begin{matrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{matrix}$$

$\leadsto 6$ parametri

$$\begin{matrix} a & c \\ c & b \end{matrix} \leadsto 2 \text{ parametri}$$

In generale, posso scegliere come mi pare i termini sulla diagonale principale e quelli sopra. A quel p.to sotto devo "copiare"



1° modo I modi sono

$$\begin{matrix} n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ 1^{\text{a}} \text{ riga} & & 2^{\text{a}} \text{ riga} & & 3^{\text{a}} \text{ riga} & & & & \text{ultima riga} \end{matrix} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2° modo Posso scegliere gli n elementi sulla diagonale più metà degli altri, quindi

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{😊}$$

$\uparrow$ el. sulla diagonale $\uparrow$ metà degli altri

Prop. L'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ è uno spazio vettoriale di dim $\frac{n(n+1)}{2}$

Dim Due verifiche quasi ovvie

→ Somma Se $A = A^t$ e $B = B^t$, allora

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A+B$$

→ Prodotto Se $A = A^t$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$

La dimensione segue dai conti fatti prima.

Esercizio Scrivere una base dello spazio delle matrici 3×3 simmetriche

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposizione Sia $f: V \rightarrow V$ lineare.

Allora f è simmetrica come applicazione se e solo se ogni matrice che rappresenta f usando in partenza ed arrivo una stessa base ORTONORMALE è simmetrica.

Dim Ci sono due cose da dimostrare

Appl. simm. $\Rightarrow$ matrice simm.

Supponiamo di aver scelto una base $v_1, \dots, v_n$ di V ortonormale.

Allora chi è a_{ij} (elemento che nella matrice sta nella riga i e colonna j)?

$$\begin{array}{c} (*) \\ \uparrow \\ f(v_j) \end{array} \quad \leftarrow v_i$$

$a_{i,j}$ è la componente di $f(v_j)$ rispetto a v_i . Ma le componenti rispetto ad una base ortonormale si calcolano facendo i prodotti scalari. Ma allora

$$a_{i,j} = \langle f(v_j), v_i \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ simm.}}}{\langle v_j, f(v_i) \rangle} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{componente di} \\ f(v_i) \text{ rispetto di } v_j}}{a_{j,i}}$$

Quindi $a_{i,j} = a_{j,i}$ per ogni scelta di i e j , quindi la matrice è simmetrica.

Matrice simmetrica $\Rightarrow$ applic. simm. Osservazione preliminare:

calcolare il prodotto scalare $\langle x, y \rangle$ è equivalente a fare $x^t y$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 vettori colonna =

Consideriamo ora due vettori v e w in V e siano x e y i vettori colonna delle loro componenti rispetto ad una base ortonormale $v_1, \dots, v_n$.

$$\begin{aligned} \text{Allora } \langle f(v), w \rangle &= \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. di} \\ f(v)}}{Ax}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. di} \\ w}}{y} \rangle = (Ax)^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trasposto} \\ \text{del prodotto}}}{y} = x^t A^t y \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ A=A^t}}{x^t} A y = \langle x, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. di} \\ v}}{Ay} \rangle = \langle v, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. di} \\ f(w)}}{f(w)} \rangle \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$
 usando che la matrice era simmetrica.

— o — o —

TEOREMA SPETTRALE

 (AKA diagonalizzazione di lusso)

Teorema (versione applicazioni)

Sia $f: V \rightarrow V$ lineare. Allora f è simmetrica (cioè migra nei prodotti scalari) se e solo se V ammette una base ORTONORMALE costituita da autovettori di f . Detto altrimenti, esiste una base ortonormale $v_1, \dots, v_n$ di V tale che

$$f(v_i) = \lambda_i f(v_i) \quad \forall i=1, \dots, n$$

Teorema (versione matrici)

Sia A una matrice $n \times n$. Allora A è simmetrica (cioè $A = A^t$) se e solo se A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè esiste M matrice $n \times n$ ortogonale ($M^{-1} = M^t$) tale che

$$\underset{\substack{\uparrow \\ M^t}}{M^{-1}} A M = D \leftarrow \text{matrice diagonale}$$

Parte facile (versione matrici)

Supponiamo che $M^{-1} A M = D$ con M ortogonale. Allora A è simm.

Ricavo A :

$$A = M D M^{-1} = M D M^t$$

Ma allora

$$A^t = (M D M^t)^t = \underset{\substack{\uparrow \\ M}}{(M^t)^t} \underset{\substack{\uparrow \\ D}}{D^t} M^t = M D M^t = A$$

Parte facile (versione applicazioni)

Supponiamo esista base ortonormale fatta di autovettori.

In questa base la matrice diventa diagonale, quindi simmetrica.

Per la prop. precedente matrice simm $\Rightarrow$ prop. simm.

Lemma 1 (Non serve nella dim., ma è istruttivo)

Se v e w sono autovettori di f corrispondenti ad autovalori distinti, allora v e w sono ortogonali (se f è simmetrica).

Dici Sia $f(v) = \lambda v$ e $f(w) = \mu w$ con $\lambda \neq \mu$. Allora

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \\ &= \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Quindi $(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$, quindi per forza $\langle v, w \rangle = 0$
 $\uparrow$
 $\neq 0$

Lemma 2 Sia $W \subseteq V$ un sottospazio.

Supponiamo che $f(w) \in W$ per ogni $w \in W$ e f simmetrica.

Allora $f(v) \in W^\perp$ per ogni $v \in W^\perp$.

Dici $W^\perp =$ tutti i vettori v t.c. $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$.

Ma allora sia $v \in W^\perp$ e sia $w \in W$. Allora

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = 0$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $W^\perp \quad W$

Quindi $f(v)$ è $\perp$ a tutti gli elementi di W , quindi $f(v) \in W^\perp$.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 40

Note Title

19/11/2021

Oss Lemma 1 e Lemma 2 valgono anche, sostanzialmente con la stessa dimostrazione, in versione matrici.

Lemma 3 (Versione matrici) Sia A matrice quadrata simmetrica reale. Allora tutti gli autovalori di A sono REALI
(Questo NON è un se e solo se)

Dim Sia λ un autovalore di A (a priori $\lambda \in \mathbb{C}$). Sia v un corrispondente autovettore. Allora anche $\bar{\lambda}$ è autovalore e $\bar{v}$ (faccio il coniugato di tutte le componenti) è un suo autovettore. Infatti se $Av = \lambda v$, facendo i coniugati troviamo

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v} \quad \leadsto \quad \overline{A} \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v} \quad \leadsto \quad A \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$$

$\uparrow$
 la matrice A
 ha coeff. reali

Adesso ragioniamo come nel Lemma 1:

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, \bar{v} \rangle &= \langle \lambda v, \bar{v} \rangle = \langle Av, \bar{v} \rangle = \langle v, A \bar{v} \rangle \\ &\quad \uparrow \\ &\quad A = A^t \\ &= \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle \end{aligned}$$

Quindi $(\lambda - \bar{\lambda}) \langle v, \bar{v} \rangle = 0$

se $v = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ allora

$$\begin{aligned} \langle v, \bar{v} \rangle &= c_1 \bar{c}_1 + c_2 \bar{c}_2 + \dots + c_n \bar{c}_n \\ &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Allora $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, cioè $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$

$\quad \quad \quad \underline{\quad 0 \quad} \quad \underline{\quad 0 \quad}$

Dim. tes. spettrale in versione matia', freccia "difficile"

Ipotesi: A è simmetrica

Tesi: A si diagonalizza mediante matrice ortogonale, cioè esiste base ortonormale di autovettori.

Sappiamo che tutti gli autovalori sono reali, quindi almeno uno c'è.

Chiamiamolo λ_1 e sia v_1 un autovettore corrispondente.

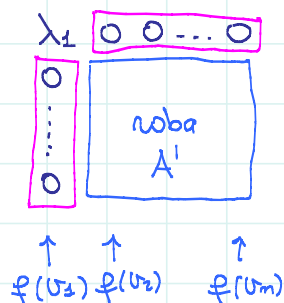
A meno di moltiplicarlo per q. cosa posso supporre che $\|v_1\| = 1$.

Considero $W = \text{Span}(v_1) =$ tutti i multipli di v_1

Essendo v_1 autovettore sappiamo che W va a finire in se stesso, cioè $Aw \in W$ per ogni $w \in W$.

Ma allora anche $W^\perp$ va a finire in se stesso.

Quindi in una base $v_1, v_2, \dots, v_m$ la matrice diventa



Adesso volendo posso procedere per induzione oppure dire a mano ... prendo un altro autovalore λ_2 (magari uguale al precedente) e procedo allo stesso modo.

Formalmente è una riduzione sulla dimensione dello spazio, perché A' è una matrice $(m-1) \times (m-1)$ che è ancora simmetrica più di sapere $v_2, v_3, \dots, v_m$ ortogonale.

— o — o —

Esercizio 1 $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ a & 5 \end{pmatrix} = A$

Si diagonalizza di LUSO (con M ortogonale) se e solo se $a=7$

(1) Determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalizzabile sui reali

Facciamo $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 7 \\ a & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 7a$
 $= \lambda^2 - 6\lambda + 5 - 7a$

Troviamo le radici

$$\Delta = 9 - 5 + 7a = 4 + 7a$$

Distinguiamo 3 casi

→ $4 + 7a < 0$, cioè $a < -\frac{4}{7}$. Autovalori complessi (diversi) coniugati. Quindi A è diagonalizzabile sui complessi, ma non sui reali.

→ $4 + 7a > 0$, cioè $a > -\frac{4}{7}$. Due autovalori REALI DISTINTI.

Allora è verificata la cond. suff.

(2 autov. reali distinti). Di sicuro A è diag. sui reali, quindi

$$M^{-1}AM = D$$

↑ ha come colonne
rispettivi autovettori

↑ ha autovalori sulla diagonale

→ $4 + 7a = 0$, cioè $a = -\frac{4}{7}$. Un unico autovalore con molteplicità ALGEBRICA = 2. Occorre vedere la geometria.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -\frac{4}{7} & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$\lambda = 3$ è l'autovalore

$$m_g(3) = \dim(\ker(A - 3Id)) = 1 \quad \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -\frac{4}{7} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 1$$

Quindi $m_A(3) = 2$ e $m_g(3) = 1 \Rightarrow$ adalio diagonalizzabilità

Esercizio 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Essendo simmetrica, questa è anche diag. di lusso

Fatto 1 Gli autovalori sono tutti reali

Basta osservare che è simmetrica

Fatto 2 $\lambda = 0$ è autovalore con $m_g(0) = 2$ e quindi $m_A(0) \geq 2$

Rango = 2 (2 colonne lin. indep.) $\Rightarrow \text{Dim}(\ker) = 2$, ma $\ker =$ autospazio dell'autovalore 0.

Base di $\ker$: $(1, 0, -1, 0)$ $(0, 2, 0, -2)$

Fatto 3 $\lambda = 6$ è autovalore con molteplicità alg. e geom. ≥ 1

(Basta osservare che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ va a finire in $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$)

Fatto 4 $\lambda = -2$ è il restante autovalore

Basta osservare che $\text{Traccia}(A) = 4 =$ somma autovalori, quindi per forza ci deve essere -2 . Autovett. prob. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Quindi il quadro completo degli autovalori è

- $\lambda = 0 \rightsquigarrow m_g(0) = m_A(0) = 2$
- $\lambda = 6 \rightsquigarrow m_g(6) = m_A(6) = 1$
- $\lambda = -2 \rightsquigarrow m_g(-2) = m_A(-2) = 1$

Quindi A è simile a

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come ottengo M . Uso come colonne dei rispettivi autovettori

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 41

Note Title

23/11/2021

FORME QUADRATICHE

Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di grado 2 nelle n variabili.

Esempi In dimensione 2 una f.q. si scrive come

$$q(x,y) = a x^2 + b y^2 + c xy$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 coefficienti, cioè numeri dati

In dimensione 3 si scrive come

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

Forme quadratiche e matrici Ad ogni forma quadratica possiamo associare una matrice simmetrica A in modo tale che

$$q(x) = x^t A x$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 vettore

Esempio 1 $q(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 6xy$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale i coeff. di x^2 e y^2
 Fuori dalla diag. $\leadsto \frac{1}{2}$ coeff. di xy

$$\begin{aligned}
 (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x \ y) \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -3x + 3y \end{pmatrix} = 2x^2 - 3xy - 3xy + 3y^2 \\
 &= 2x^2 - 6xy + 3y^2
 \end{aligned}$$

Esempio 2

$$q(x, y, z) = x^2 - 7y^2 + yz - 4xz$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

Per verifica controllare che

 $(x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ venga quello che
dove venire
Esempio 3

$$q(x, y, z) = xy + 2xz + 3yz$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 4 Consideriamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare la corrispondente forma quadratica

$$q(x, y, z, w) = x^2 - y^2 + 3z^2 + 14xy - 4xz + 2xw + 2yw + 4zw$$

Conclusione: esiste corrispondenza biunivoca tra matrici $n \times n$
simmetriche e forme quadratiche

DOMANDA Data una forma quadratica $q(x)$ in n variabili, cosa posso dire del **SEGNO** di $q(x)$ al variare di x in $\mathbb{R}^d$.

Possibili situazioni

Una forma quadratica si dice

- **DEFINITA POSITIVA** se $q(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ↑
vettore nullo
- **DEFINITA NEGATIVA** se $q(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- **SEMIDEFINITA POSITIVA** se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- **SEMIDEFINITA NEGATIVA** se $q(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- **INDEFINITA** se non ricade in nessuno dei casi precedenti, cioè esiste $x_1 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(x_1) > 0$ ed esiste $x_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(x_2) < 0$.

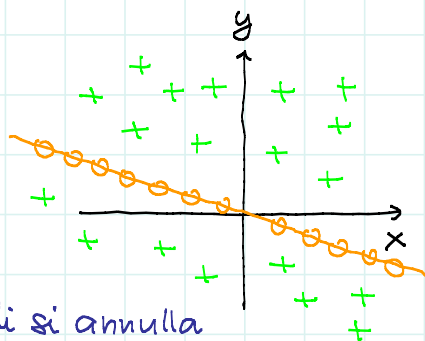
Oss. Se $q(x)$ è definita positiva, allora si intende che è anche semidefinita positiva.

Esempio 1 $q(x, y) = 3x^2 + 2y^2$

Questa è definita positiva

Esempio 2 $q(x, y) = x^2 + 9y^2 + 6xy$

Osservo che $q(x, y) = (x + 3y)^2 \geq 0$ e quindi si annulla per $y = -\frac{1}{3}x$, quindi per ∞ valori di x e y



Proviamo $q(-3,1) = 9 + 9 + 6(-3) \cdot 1 = 18 - 18 = 0$

In questo caso la forma è SEMIDEFINITA POSITIVA, ma non definita positiva.

Esempio 3 $q(x,y) = x^2 - 4y^2$

Si vede subito che è indefinita

$$q(1,0) = 1$$

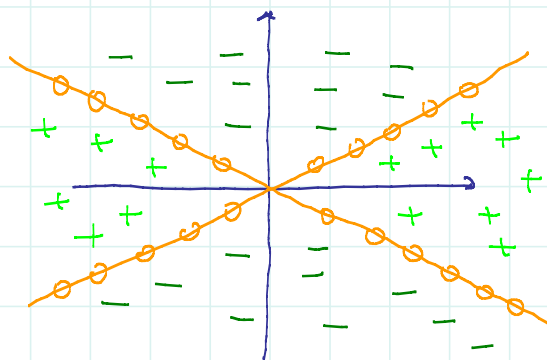
$$q(0,1) = -4$$

Cerchiamo di capire le zone + e -

$$q(x,y) = (x+2y)(x-2y)$$

Le zone di annullamento sono

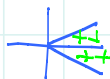
$$x = \pm 2y \quad \leadsto \quad y = \pm \frac{1}{2}x$$



Bisognerebbe distinguere i casi

$$x+2y > 0 \quad y > -\frac{1}{2}x$$

$$x-2y > 0 \quad y < \frac{1}{2}x$$



Analogamente per le altre 4 zone.

Esempio 4 $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

Anche questo è indefinita

$$q(1,0,0) > 0$$

$$q(0,0,1) < 0$$

Come sono fatte le zone?

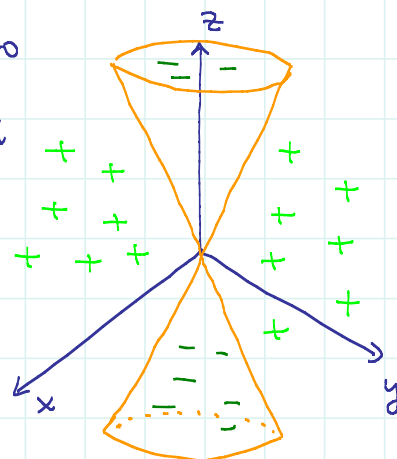
$$q(x,y,z) > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 \leq x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Segno - dentro
cono

segno + fuori
dal cono



SEGNATURA DI UNA FORMA QUADRATICA

Ad ogni forma quadratica $q(x)$ in n variabili sono associati 3 numeri

$$n_0 \quad n_+ \quad n_-$$

talvolta detti INDICI DI INERZIA tali che

$$n_0 + n_+ + n_- = \text{dimensione}$$

dove $\rightarrow n_+ =$ massima dimensione di un sottospazio su cui la restrizione di q è definita positiva

$\rightarrow n_- =$ massima ... definita negativa

$\rightarrow n_0 =$ per ora è definito per differenza in modo da far tornare la somma.

Back to esempio 3 $n_+ =$ max dimensione di un s.sp. contenuto nella zona +
 $= 1$ (rette)

$n_- = 1$ per lo stesso motivo

$$n_0 = 0$$

Back to esempio 4 $n_+ = 2$ (ad esempio piano xy)
 $n_- = 1$ (ad esempio asse z)

$$\leadsto n_0 = 0$$

ALGEBRA LINEARE

—

LEZIONE 42

Note Title

23/11/2021

Domanda: data una forma quadratica $q(x)$

→ come determino n_+ , n_- , n_0 ?

→ come trovo dei sottospazi di dimensione max su cui $q(x)$ è sempre > 0 oppure < 0 ?

[Questi sono decisamente unu unici]

Avremo 4 metodi

- ① Seguo autovalori
- ② Completamento dei quadrati
- ③ SYLVESTER
- ④ CARTESIO

1 - Seguo autovalori

Data la forma, scrivo la matrice A che la rappresenta. Essendo A simmetrica, questa avrà n autovalori (eventualmente con molteplicità)

Ebbene

→ n_+ = numero autovalori positivi

→ n_- = " " negativi

→ n_0 = " " nulli [è la molteplicità di 0]

Per trovare UN s.sp. di dimensione n_+ su cui q è positiva basta prendere lo span degli autovettori corr. agli autovalori positivi e idem per n_- .

Oss. Il metodo diventa complicato in dimensione alta

Esempio 1 $q(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 6xy$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \quad \text{quindi sono uno + e uno -}$$

Oss. A noi bastava sapere il segno.

$$\text{Det} = 6 - 9 = -3 = \text{prodotto autovalori, pu cui sono + e -}$$

Quindi $m_0 = 0$, $m_+ = 1$, $m_- = 1 \leadsto$ è INDEFINITA

Nella pratica è scomodo trovare gli autovettori.

Esistono coppie (x,y) pu cui $q(x,y) > 0$, ad esempio $q(1,0) > 0$
 " " " " " $q(x,y) < 0$ e queste si vedono meno

Esempio 2 Determinare per quali valori del parametro a la forma quadratica

$$q(x,y) = ax^2 + 3y^2 + 2xy$$

risulta definita positiva ($m_+ = 2$, $m_- = m_0 = 0$)

Scrivo la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$

e cerco di capire il segno degli autovalori

$$\text{Det } A = 3a - 1 \quad \text{e deve essere } > 0, \text{ quindi } a > \frac{1}{3}$$

• Se $a < \frac{1}{3}$, allora $\text{Det} < 0 \leadsto$ autovalori + -

• Se $a > \frac{1}{3}$, allora $\text{Det} > 0 \leadsto$ autovalori ++ oppure --, ma
 Traccia $A = 3 + a > 0$, quindi sono ++ $\leadsto$ definita positiva

• Se $a = \frac{1}{3}$, allora gli autovalori sono 0 e $\frac{10}{3} = \text{Traccia}(A)$

Esempio 4 $q(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 6xy$

Proviamo a completare i quadrati

$$q(x, y) = 2(x^2 + 3xy) + 3y^2$$

$$= 2\left(x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2\right) + 3y^2$$

$\uparrow$
 doppio prodotto
 di x e $\frac{3}{2}y$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{9}{2}y^2 + 3y^2$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{3}{2}y^2$$

Come già sapevamo $m_+ = 1$ e $m_- = 1$ e $m_0 = 0$.

Come ottengo un sottospazio su cui $q(x, y) < 0$?

Basta porre $x + \frac{3}{2}y = 0$, quindi $\text{Span}(3, -2)$

Verifica: $q(3, -2) = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3(-2) = 18 + 12 - 36 = -6 < 0$

Esempio 5 $x^2 + y^2 + 4xz + 6xz = q(x, y, z)$

$$\underbrace{x^2 + 4xy + 6xz + y^2}_{\substack{\text{doppio prodotto} \\ \text{di } x \text{ e } \frac{3}{2}y}} = \underbrace{x^2 + 4xy + 6xz}_{\substack{\text{doppio prodotto} \\ \text{di } x \text{ e } \frac{3}{2}y}} + \underbrace{4y^2 - 4y^2 + 9z^2 - 9z^2}_{\substack{\text{doppio prodotto} \\ \text{di } y \text{ e } \frac{3}{2}z}} + y^2$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 3y^2 - 9z^2 - 12yz$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 3(y^2 + 4yz + 3z^2)$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 3(y^2 + 4yz + 4z^2 - 4z^2 + 3z^2)$$

$$= (x+2y+3z)^2 - 3(y+2z)^2 + 3z^2$$

Quindi $m_+ = 2$ e $m_- = 1$ (e quindi $m_0 = 0$)

[Dalla matrice avrei visto che $\det A < 0 \Rightarrow$ autovalori possono essere $++-$ oppure $---$, ma essendo $\text{Traccia}(A) = 2$ escludo $---$]

Come trovo un s.sp. di dim 2 su cui è > 0 ?

Basta porre $y+2z = 0 \Rightarrow \text{Span}((0, -2, 1), (1, 0, 0))$

Come trovo un s.sp. di dim 1 su cui è < 0 ?

Impongo $\begin{cases} x+2y+3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Span}(2, -1, 0)$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 43

Note Title

23/11/2021

CARTESIOTeorema misterioso (di Analisi)

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n a coeff. reali con n radici reali, contate con molteplicità (questo accade per i pol. conatt. delle matrici simmetriche).

Allora (posso prevedere il segno delle radici)

- il numero di radici nulle è l'esponente della + piccola potenza di x che compare nel polinomio (è 0 se c'è il termine noto non nullo)
- il numero di radici positive è il numero di variazioni di segno tra i coeff. del polinomio
- il numero di radici negative si ottiene per differenza

Esempio $p(x) = x^5 - x^3$

→ Le radici nulle sono 3 perché x^3 è la + piccola potenza di x

→ Le radici positive sono 1 (i coeff. del pol. sono $+ -$)

→ Le radici neg. sono 1

Riprova: $x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3(x+1)(x-1)$

$x=0 \rightsquigarrow$ mult 3 e poi $x=\pm 1$.

[La parte facile del teo. è il numero di radici nulle]

Utilizzo pratico: calcolo $P_A(x)$ e concluso usando il teorema.

Però non mi aiuta a trovare sottospazi su cui $q(x)$ risulta positivo o negativo.

SYLVESTER

Versione basic

Sottotitolo: MINORI ORLATI

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 4 \\ 1 & \boxed{2} & 0 \\ 4 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

ALGORITHM

- Parto da in alto a sx e considero tutte le sottomatrici $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \dots$ ottenute ORLANDO la precedente
- Calcolo tutti i loro determinanti
- SPERO siano tutti $\neq 0$
- Scrivo di fila i loro segni $+ - - + - -$
- Aggiungo a sx un + d'ufficio
- n_+ = numero di permanenze di segno
 n_- = numero di variazioni di segno

Nell'esempio: $\det_{1 \times 1} = 3$, $\det_{2 \times 2} = 5$, $\det_{3 \times 3} = -6 - 32 + 1 = -37$

+ + + -
 ↑ P P V
 d'ufficio

$$n_+ = 2 \quad e \quad n_- = 1$$

Versione basic - Sylvester 1-2-3

Variante: Sylvester 3-2-1

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Sylvester 2-3-1

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

1° passaggio: 2ª riga e colonna

2° passaggio: 2ª e 3ª riga e colonna

3° passaggio: tutta la matrice

Sylvester 1-3-2

1° passaggio

2° passaggio

3° passaggio

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{*} & * & \boxed{*} \\
 * & * & * \\
 \boxed{*} & * & \boxed{*}
 \end{array}$$

Esempio Determinare, al variare del parametro a , la segnatura della forma di matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & a & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = ay^2 + z^2 + 4xy - 2xz + 6yz$$

Sylvester 1-2-3 no male subito

Sylvester 3-2-1

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = a - 9$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = -6 - 6 - a - 4 = -a - 16$$

Ora devo discutere il segno di 2 determinanti, e avrei anche problemi quando $a = 9$, oltre ovviamente nel caso $a = -16$

$$\text{Sylvester } 3-1-2 : \quad \text{Det}_{1 \times 1} = 1 \quad \text{Det}_{2 \times 2} = -1 \quad \text{Det}_{3 \times 3} = -a - 16$$

Distinguiamo 3 casi

- Se $-a - 16 > 0$, cioè $a < -16$, allora
quindi $m_+ = 1$, $m_- = 2$, $m_0 = 0$

(se uno non ricorda se m_+ dipende da P o V , basta pensare a cosa accade per una matrice diagonale)

- Se $-a - 16 < 0$, cioè $a > -16$, allora
quindi $m_+ = 2$, $m_- = 1$, $m_0 = 0$

d'ufficio

$$\begin{array}{ccc}
 + & + & - \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} \\
 P & V & V
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 + & + & - \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} \\
 P & V & P
 \end{array}$$

- Se $a = -16$, allora Sylvester non funziona immediatamente.

Però in questo caso

- $n_0 \geq 1$ perché c'è un autovalore nullo (almeno)
- $n_+ \geq 1$ perché c'è almeno una direzione di positività
cioè $\text{Span}(0,0,1)$
- $n_- \geq 1$ perché ... negatività, cioè $\text{Span}(0,1,0)$

Poiché la somma deve fare 3, per forza $n_+ = n_- = n_0 = 1$

Casi in cui Sylvester non può funzionare

- quando il Det generale si annulla
- quando sulla diagonale sono tutti 0, cioè la forma quadratica ha solo termini misti

Esempio facile $q(x, y) = xy$

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \quad + \quad -$$

Esempio meno facile

$$q(x, y, z) = 4xz + 6yz - 8yz$$

1° modo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -24 - 24 = -48$$

→ autovalori $- \quad - \quad -$ opp. $\boxed{+ \quad + \quad -}$
 ↑
 No Buono perché $\text{Tr} = 0$

2° modo Proviamo a completare i quadrati

$$4xz + 6yz - 8yz = (x+y+\alpha z)^2 - (x-y+\beta z)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)z^2$$

Scegliendo bene α e β , riesco a sistemare xz e yz ?

$$2\alpha - 2\beta = 6 \quad \text{coeff. di } xz \quad \leadsto \text{risolvendo il sistema trovo } \alpha \text{ e } \beta$$

$$2\alpha + 2\beta = -8 \quad \text{coeff. di } yz$$

devono essere lin. indep.

Oss. Occhio a non fare

$$2x^2 + y^2 = \overset{\uparrow}{x^2} + \overset{\uparrow}{x^2} + y^2 \text{ e dire che sono } 3+!!!$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 44

Note Title

26/11/2021

Def. Un blocco di jordan $k \times k$ è una matrice $k \times k$ che ha un certo $\lambda \in \mathbb{R}$ ripetuto sulla diagonale, tutti 1 sopra la diagonale e tutti 0 altrove.

Una matrice di jordan è una matrice quadrata ottenuta allineando dei blocchi di jordan lungo la diagonale (il resto sono 0)

Esempi Blocchi di jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}$$

 1×1

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

 2×2

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

 3×3

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

 4×4

Ovviamente il λ può essere a sua volta 0 oppure 1 (o un altro numero)

Matrici di jordan (i numeri "mancanti" sono tutti 0)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 32 & 1 \\ & & & 32 & 1 \\ & & & & 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Oss. Una matrice diagonale è una speciale matrice di jordan, in cui tutti i blocchi sono da 1×1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Teorema misterioso (Jordan sui complessi)

Sia A una matrice quadrata con elementi reali o complessi.

Allora A è simile ad una matrice di Jordan eventualmente complessa (cioè il λ sulla diagonale può essere un numero complesso).

Inoltre

- (1) i numeri che compaiono lungo la diagonale sono gli n autovalori della matrice, contati con molteplicità (sui complessi esistono sempre)
- (2) ogni autovalore λ compare $m_a(\lambda)$ volte (mult. algebrica)
- (3) per ogni autovalore λ , il numero di blocchi è uguale a $m_g(\lambda)$ (in particolare, se $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, allora tutti i blocchi di λ sono da 1×1) cioè uguale a $\dim(\ker(A - \lambda Id))$
- (4) per ogni autovalore λ , il numero di blocchi di $\dim \geq k$ è

$$\dim(\ker(A - \lambda Id)^k) - \dim(\ker(A - \lambda Id)^{k-1})$$

Oss. Cosa succede se prendo un blocco di Jordan e sottraggo λId ?

Sopravvivono solo gli 1 sopra.

Cosa succede se faccio potenze di questi?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fatto generale: dato un blocco di Jordan con 0 sulla diagonale, quando calcolo le sue potenze gli 1 si muovono di un livello verso alto-destra. Ogni volta ne sparisce uno. Ad ogni passaggio il rango scende di 1 e $\dim(\ker)$ sale di 1. Su questo fatto si basa il punto (4) del teorema misterioso.

Def. Un blocco di jordan reale $2k \times 2k$ (dimensione pari) è una matrice che ha

→ lungo la diagonale dei blocchi 2×2 della forma indicata a lato

→ al livello "sopra" delle matrici identità 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Esempi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

2×2

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

4×4

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & & \\ -b & a & 0 & 1 & & \\ & & a & b & 1 & 0 \\ & & -b & a & 0 & 1 \\ & & & & a & b \\ & & & & -b & a \end{bmatrix}$$

6×6

il resto
sono zeri

Def. Una matrice di jordan reale è una matrice ottenuta mettendo di fila sulla diagonale

→ dei blocchi "normali" con λ reali sulla diagonale

→ dei blocchi del nuovo tipo

Esempi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & -7 \\ & & & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ & 7 \end{bmatrix}$$

4×4

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \\ & & 4 & 5 \\ & & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema misterioso (Jordan sui reali)

Sia A una matrice quadrata con elementi reali.

Allora A è simile ad una matrice di Jordan reale.

Inoltre la struttura della matrice di Jordan è la seguente

(1) i numeri reali che appaiono sulla diagonale dei blocchi "standard" sono gli autovalori reali contati con molteplicità, e vale tutto quello che valeva nel caso complesso

(2) ogni blocco $\pm i$ nel caso complesso con $a+ib$ sulla diagonale produce un blocco 2×2 del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(nota bene: se $a+ib$ è autovalore, allora

anche $a-ib$ è autovalore, tra l'altro con la

stessa molteplicità alg. e geom., quindi stiamo sostituendo

$$\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(3) ogni blocco $k \times k$ con $a+ib$ sulla diagonale diventa un blocco reale con k volte $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e le identità 2×2 sopra

(nota bene: ad ogni blocco complesso con $a+ib$ sulla diagonale ne corrisponde (se A è reale) uno uguale con $a-ib$ sulla diagonale)

Esempi Traduzioni da Jordan complesso a Jordan reale

$$\begin{pmatrix} \boxed{2+3i} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2-3i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2+3i & 1 & 2-3i & 1 \\ 0 & 2+3i & 0 & 2-3i \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array} \right)$$

il resto sono 0

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & & 2 \\ & & 2 & 3 & & \\ & & -3 & 2 & & \end{array} \right)$$

Il resto sono 0

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 45

Note Title

26/11/2021

Esempio 1 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = A$

Trovare la forma canonica sui reali e sui complessi.

Passo 1 Calcolo gli autovalori $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-17} = 4 \pm \sqrt{-1} = 4 \pm i \quad \text{autovalori complessi coniugati}$$

Ora sappiamo che

→ sui reali NON è diagonal. (autov. non reali)

→ sui complessi è diagonalizzabile (autovalori diversi)

Passo 2 Su $\mathbb{C}$ la matrice A è simile a $\begin{pmatrix} 4+i & 0 \\ 0 & 4-i \end{pmatrix} = D$

Si tratta di trovare M invertibile tale che

$$D = M^{-1} A M$$

Fatto generale: M ha come colonne i rispettivi autovettori

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4+i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x+y = (4+i)x \\ -2x+5y = (4+i)y \end{cases} \quad \begin{cases} (-1-i)x+y=0 \\ -2x+(1-i)y=0 \end{cases}$$

Poniamo $y=2$ e dalla seconda equazione troviamo $x=1-i$.

Osserviamo che risolve la prima equazione pure! $\leftarrow$ Deve succedere

Quindi $(1-i, 2)$ è un autovettore relativo a $4+i$

Sospetto fortemente che

$(1+i, 2)$ sia autovettore relativo a $4-i$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3i \\ 8-2i \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} (4-i) \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} (4-i)(1+i) &= 4+4i-i+1 \\ &= 5+3i \quad \checkmark \end{aligned}$$

Quindi $M = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Verificare per esercizio che $M^{-1} A M = D$.

Passo 3 Su $\mathbb{R}$ la matrice A è simile a $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = J$ che è la matrice di Jordan reale prodotta a partire da quella diagonale complessa.

Cerchiamo ora M , matrice 2×2 REALE invertibile, tale che

$$M^{-1} A M = J$$

Le colonne di M sarebbero la base "jordanizzante".

Qui sarebbero le colonne di questa M . Sono due vettori v_1 e v_2 tali che

$$A v_1 = 4 v_1 - v_2$$

$$A v_2 = v_1 + 4 v_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ A v_1 & A v_2 \end{matrix}$

v_1 e v_2 sono le parti reali e immaginari di un autovettore complesso relativo a $4+i$, quindi nel vostro caso

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perché funziona? Supponiamo $v = v_1 + iv_2$ sia autovettore di A relativo a $a+ib$. Questo vuol dire che

$$A(v_1 + iv_2) = (a+ib)(v_1 + iv_2)$$

$$Av_1 + iAv_2 = av_1 + iav_2 + ibv_1 - bv_2$$

Se uguagliamo le parti reali e immaginarie troviamo

$$\begin{aligned} Av_1 &= av_1 - bv_2 \\ Av_2 &= bv_1 + av_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

cioè esattamente quello che serve.

Nel vostro caso $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Verifica $M^{-1}AM = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

— 0 — 0 —

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare forma canonica
reale e complessa

Passo 1 Autovaleori $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$$

Quindi $\lambda = 2$ è autovalore con $u_a = 2$

Calcolo u_g

$$A - 2\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = 1 \Rightarrow \dim(\ker) = 1$$

$$\Rightarrow u_g = 1$$

$\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile, né in $\mathbb{C}$ né in $\mathbb{R}$.

Fatto 2 La forma di Jordan (in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ è lo stesso) ha $\lambda = 2$ sulla diagonale e ha un unico blocco, per forza 2×2
 $\uparrow$
 $u_g = 1$

Quindi

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fatto 3 Cerco M (2×2 invertibile) tale che $M^{-1} A M = J$.

Chi sono le colonne di M ? Sono due vettori v_1 e v_2 tali che

$$A v_1 = 2 v_1 \quad \leadsto v_1 \text{ è autovettore di } A \text{ relativo a } \lambda = 2$$

$$A v_2 = v_1 + 2 v_2 \quad (\text{si vede a occhio che } (1, -1) \text{ va bene})$$

Adesso cerco convenientemente v_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 3x + y = 1 + 2x \\ -x + y = -1 + 2y \end{cases}$$

$$A v_2 = v_1 + 2 v_2$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \quad \text{Una possibile soluzione è } (1, 0)$$

$$\text{Quindi } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fare verifica per esercizio

Esempio 3

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Domanda: per quali valori di a e b sono simili?

Fatto 1 Se $a \neq 5$ e $a \neq 2$ allora la prima è di sicuro diagonalizzabile, qualunque sia il valore di b .

Quindi in questi casi sono simili per forza.

Fatto 2 Se $a = 2$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e per essere diagonalizzabile serve che $m_g(2) = 2 = m_a(2)$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Questa ha } \dim(\ker) = 2 \text{ se e solo se } \text{Rango} = 1, \text{ cioè se e solo se } b = 0$$

Se $a = 2$ e $b = 0$ allora sono simili, altrimenti la prima è simile a

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fatto 3 Se $a = 5$ la matrice diventa

Devo vedere quando $m_g(5) = 2$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - 5Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Come prima ha rango } = 1 \text{ se e solo se } b = -9$$

Quindi $a = 5$ e $b = -9 \Rightarrow$ simili, altrimenti A è simile a

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 46

Note Title

30/11/2021

PRODOTTI SCALARI IN GENERALI

Def. Sia V uno sp. vett. (per noi di dimensione finita).

Un prod. scalare in V è una funzione $V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (INPUT: 2 vettori
OUTPUT: 1 numero)
che di solito si indica con $\langle x, y \rangle$ che verifica le seguenti proprietà

$$(i) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (\text{simmetria})$$

$$\forall x \in V \quad \forall y \in V$$

$$(ii) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\forall x_1, x_2, y \in V$$

$$(iii) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\forall x \in V \quad \forall y \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(ii') \quad \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

$$(iii') \quad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

Oss. La (ii') segue da (i) + (ii). Infatti

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle y_1 + y_2, x \rangle = \langle y_1, x \rangle + \langle y_2, x \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

$\uparrow$ (i) $\uparrow$ (ii) $\uparrow$ (i)

Analogamente (iii') segue da (i) + (iii).

Esempio 1 $V = \mathbb{R}_{\leq 25} [x]$ Definisco

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{12}^{25} p(x) q(x) dx$$

Dico che è un prodotto scalare

• Prende in INPUT 2 polinomi e restituisce un numero

$$(i) \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \langle q(x), p(x) \rangle \quad \leadsto \text{ovvia}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle &= \int_{12}^{25} (p_1(x) + p_2(x)) q(x) dx && \langle p_2(x), q(x) \rangle \\ &= \int_{12}^{25} p_1(x) q(x) dx + \int_{12}^{25} p_2(x) q(x) dx = \langle p_1(x), q(x) \rangle + \end{aligned}$$

Esempio 2 $V = \mathbb{R}^3$ $x = (x_1, x_2, x_3)$
 $y = (y_1, y_2, y_3)$

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 7 x_2 y_2$ è un prodotto scalare

- Input : 2 vettori Output : 1 numero

(i) Se scambio x con y ottengo la stessa cosa.

(iii) Se moltiplico x per λ , poi il λ si raccoglie

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \langle x + \hat{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \hat{x}, y \rangle \\ & \quad \quad \quad \parallel \qquad \qquad \parallel \\ & (x_1 + \hat{x}_1)y_1 + i(x_2 + \hat{x}_2)y_2 \end{aligned}$$

Esempio 3 V, x, y come sopra

$\langle x, y \rangle = x_1 y_2$ NON è un prod. scalare

NON è simmetrico! Se $x = (1, 0, 0)$ e $y = (0, 1, 0)$, allora

$\langle x, y \rangle = 1$ mentre $\langle y, x \rangle = 0$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1 \quad \text{è un prod. scalare}$$

$\langle x, y \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$ é uma PORCHERIA

(i) Ok (se scambio x con y resta uguale)

(iii) Se moltiplico x per λ raddoppo λ^2 sul 1° termine, e viene sul secondo

$$x = (1, 1, 0) \quad y = (1, 1, 1)$$

$$\langle x, y \rangle = 2 \quad \langle 2x, y \rangle = 5 \neq 2 \langle x, y \rangle$$

Prodotti scalari e matrici

Sia $\langle x, y \rangle$ un prodotto scalare in V .

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V .

Allora come sempre scrivo in modo unico

$$x = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$$

$$y = y_1 v_1 + \dots + y_m v_m$$

Allora

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^m x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle$$

Tocchiamo con mano per $m=2$

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

$$y = y_1 v_1 + y_2 v_2$$

$$\begin{aligned} \langle x_1 v_1 + x_2 v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle &= \langle x_1 v_1, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle + \langle x_2 v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle \\ &= x_1 \langle v_1, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle + x_2 \langle v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle \end{aligned}$$

$$= x_1 (y_1 \langle v_1, v_1 \rangle + y_2 \langle v_1, v_2 \rangle) + x_2 (y_1 \langle v_2, v_1 \rangle + y_2 \langle v_2, v_2 \rangle)$$

$$= x_1 y_1 \langle v_1, v_1 \rangle + x_1 y_2 \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{uguali}}} + x_2 y_1 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{uguali}}} + x_2 y_2 \langle v_2, v_2 \rangle$$

Conseguenza Se conosco tutti i prodotti $\langle v_i, v_j \rangle$ tra due qualunque elementi della base, allora so fare il prodotto tra due qualunque vettori.

Ad ogni prodotto scalare, scelta una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ di V associamo la matrice $n \times n$ che chiamiamo B con

$$b_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Si tratta di una matrice SIMMETRICA.

A quel punto la formula di prima ci dice che

$$\langle x, y \rangle = y^t B x$$

$\uparrow$ componenti di y messe in riga dal trasposto
 $\uparrow$ componenti di x messe in colonna

Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$
 $y = (y_1, y_2)$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1 - 3 x_2 y_2$$

(verificare che sia un prod. scalare)

Prendiamo in $\mathbb{R}^2$ la base canonica e_1, e_2 . Chi è la matrice B ?

$$b_{1,1} = \langle e_1, e_1 \rangle = 0$$

$$b_{1,2} = \langle e_1, e_2 \rangle = 1 \quad (\text{si salva solo il 1°})$$

$$b_{2,1} = \langle e_2, e_1 \rangle = 1 \quad (\text{si salva solo il 2°})$$

$$b_{2,2} = \langle e_2, e_2 \rangle = -3$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che

$$\langle x, y \rangle = (y_1 \ y_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

$y^t \quad B \quad y = y_1 x_2 + y_2 x_1 - 3 x_2 y_2$

Domande

① Se cambio la base, come cambia la matrice

② Se scelgo bene la base, quanto semplice può diventare la matrice

↓ (Semplificazione)

Risposta ② Se M è la matrice di cambio di base
(le colonne sono le componenti dei vettori della nuova
base rispetto alla vecchia) allora la nuova matrice
diventa

$$M^t B M$$

Def. Due matrici B_1 e B_2 si dicono CONGRUENTI se esiste M
invertibile tale che

$$B_2 = M^t B_1 M$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 47

Note Title

30/11/2021

Come cambia la matrice di un prod. scalare quando cambio base

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V in cui

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = y^t B x$$

Consideriamo una nuova base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$. Le comp. di $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nella nuova base sono $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Ora sappiamo che

$$x = M \hat{x}$$

$$y = M \hat{y}$$

M cambia dalla nuova alla vecchia

dove M è la matrice di cambio di base (colonne sono le comp. di $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$ rispetto a $v_1, \dots, v_n$)

A questo punto

$$\hat{y}^t \hat{B} \hat{x} = y^t B x \quad \leadsto \quad \hat{y}^t \boxed{\hat{B}} \hat{x} = (M \hat{y})^t B M \hat{x} \\ \quad \quad \quad \uparrow \text{matrice nuova} \quad \quad \quad = \hat{y}^t \boxed{M^t B M} \hat{x}$$

da cui si ricava che $\hat{B} = M^t B M$

Oss. Abbiamo usato che se $y^t A x = y^t \hat{A} x$
per ogni x e y , allora $A = \hat{A}$

Questo è vero perché $e_j^t A e_i =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ j}} A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\leftarrow i \\ \text{colonna } i \text{ di } A}} = \text{"elemento } a_{ji} \text{"}$$

Formula quadratica associata ad un prod. scalare

$$q(x) = \langle x, x \rangle = x^t B x$$

Ora $q(x)$ ha la sua segnatura (n_+, n_-, n_0) .

Teorema (Sylvesterizzazione)

Ogni matrice simmetrica B è congruente ad una matrice diagonale che ha sulla diagonale

→ n_+ volte 1

→ n_- volte -1

→ n_0 volte 0

dove n_+, n_-, n_0 sono la segnatura della forma quadratica associata.

Oss. Se la forma è definita positiva, allora diventa l'identità.

Esempio 1

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} = 1 \rightarrow$ autov. ++ oppure --
guando la traccia è resta solo ++

$$q(x, y) = 5x^2 + y^2 + 4xy$$

Il prodotto scalare associato è $v = (x_1, y_1)$

$$w = (x_2, y_2)$$

$$\langle v, w \rangle = 5x_1x_2 + y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$

Voglio trovare una base v_1, v_2 in cui la matrice diventa l'identità.

Cosa deve succedere

$$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 1$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle_B = \langle v_2, v_1 \rangle_B = 0$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle_B = 1$$

Stiamo cercando una base ortonormale
rispetto al prodotto scalare

Quindi $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (2, -5)$ sono una base ortogonale.

Per renderla ortonormale basta dividere per la costante opportuna

$$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 5$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = 5$$

$$(2 \ -5) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = (2 \ -5) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 \quad \checkmark$$

Base Sylvestrizzante è $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5}\right)$
con matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$[\text{Verifica: } M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

Esempio 2 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = B$

$$\text{Det} = -10 \rightsquigarrow \text{autovalori } + -$$

Scrivere l'equazione della retta perpendicolare al vettore $\boxed{(1, 1)}$.

Impongo $\langle (1, 1), (x, y) \rangle_B = 0$ cioè

$$(1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ 1) \begin{pmatrix} 2x+4y \\ 4x+3y \end{pmatrix} = \boxed{6x+7y=0}$$

A quale matrice è congruente B ? Dipende dalla segnatura della forma quadratica, quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Devo trovare una base v_1, v_2 tale che

$$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 1$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle_B = -1$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle_B = 0$$

In prima istanza ci basta $\langle v_1, v_2 \rangle_B = 0$ poi sistemiamo la prima e la seconda

Sappiamo che $\langle (1,1), (7,-6) \rangle_B = 0$

Calcoliamo $\langle (1,1), (1,1) \rangle_B = 13$

$$\langle (7,-6), (7,-6) \rangle_B = 2 \cdot 49 + 3 \cdot 36 - 8 \cdot 42 = -1$$

UNA

↓
La base ortonormale è

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{7}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}} \right)$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 48

Note Title

30/11/2021

Def. Un'applic. lineare $f: V \rightarrow V$ si dice simmetrica rispetto ad un prod. scalare se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall v \in V \quad \forall w \in V$$

↑ ↑
prod. scalare dato

Cosa vuol dire in termini di matrici?

- Sia B la matrice che rappresenta il prod. scalare
- Sia A la matrice che rappresenta f
- Sia x il vettore delle componenti di v
- Sia y il vettore delle " " w

} rispetto ad
una stessa
base

Allora

$$\langle f(v), w \rangle = y^t B \underbrace{Ax}_{\substack{\uparrow \\ \text{componenti} \\ \text{di } f(v)}}$$

$$\langle v, f(w) \rangle = (Ay)^t B x = y^t A^t B x$$

I due sono uguali per ogni x e y se e solo se

$$BA = A^t B$$

Oss. Se la base è ortonormale, allora $B = Id$ e la relazione diventa la solita $A = A^t$.

Teorema B-spettrale

Versione applicativa

Sia f appl. simmetrica rispetto ad un prod. scalare **definito positivo**

Allora esiste una base **ortonormale** di V costituita da autovett. di f .
 $\uparrow$
 risp. al prod. scalare
 standard

Versione matrici

Sia B matrice simmetrica **definita positiva**
 (moralmente: il prod. scalare)

Sia A una matrice tale che

$$BA = A^t B$$

(moralmente: l'applic. lineare simmetrica)

Allora esiste una matrice invertibile M (moralmente: il cambio di base) tale che

$$M^{-1} A M = D \leftarrow \text{(diagonale con autovalori di } A \text{ sulla diagonale)}$$

$$M^t B M = \text{Identit\`a}$$

(M \u00e8 una matrice ortogonale per il prod. scalare dato da B , le cui righe e colonne sono B -orto-normali)

Oss 1 Se $B = Id$ ridiventa il teorema classico

Oss 2 La matrice M nello stesso tempo

→ diagonalizza A per similitudine

→ Syvesterizza B per congruenza

— o — o —

Esercizio 1 Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Consideriamo il prodotto scalare

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx$$

(0) Verificare che è prod. scalare $\rightarrow$ già fatto

(1) Verificare che è definito positivo

Devo dimostrare che $\langle p(x), p(x) \rangle > 0$ per ogni $p(x) \neq 0$

Vero perché

$$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_0^1 p(x)^2 dx > 0 \text{ se } p(x) \text{ non è sempre nullo}$$

(3) Scrivere la matrice che rappresenta il prod. scalare rispetto alla base $1, x, x^2$

Devo calcolare tutti i 6 possibili prod. scalari

$$\langle x^a, x^b \rangle = \int_0^1 x^{a+b} dx = \frac{1}{a+b+1}$$

Devo usare $a = 0, 1, 2$ e $b = 0, 1, 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x & x^2 \end{matrix}$$

(4) Calcolare $\langle 2x+1, x^2-3 \rangle$

1° modo Uso definizione $\int_0^1 (2x+1)(x^2-3) dx$

$$= \int_0^1 (2x^3 - 6x + x^2 - 3) dx = \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{3} - 3 = \frac{5}{6} - 6 = \boxed{-\frac{31}{6}}$$

2° modo Uso della matrice

$$(1 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} -3 + \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \\ -1 + \frac{1}{5} \end{pmatrix} = -3 + \frac{1}{3} - 3 + \frac{1}{2} \quad \text{☺}$$

(5) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}_{\geq 2}[x]$ (poi renderla ortonormale è facile)

Metodo classico: parto dalla canonica e applico GS

$$v_1 = 1 = e_1 = \text{polinomio 1}$$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 = x - \frac{1}{2} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\langle e_2, v_1 \rangle_B = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle_B = \int_0^1 1 \, dx = 1$$

Senza frazioni possiamo usare $v_2 = 2x - 1$

Come calcolo v_3 ?

1° modo Vado avanti con GS

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle e_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = x^2 - \frac{1}{2} (2x - 1) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Resta da calcolare

$$\langle v_3, v_2 \rangle = \int_0^1 x^2 (2x-1) dx = \int_0^1 2x^3 - x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \int_0^1 (2x-1)^2 dx = \left[\frac{(2x-1)^3}{3 \cdot 2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Quindi

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = 2x-1$$

$$v_3 = 6x^2 - 6x + 1$$

sono 3 polinomi ortogonali risp. al prodotto.

2° modo Cerco v_3 del tipo $a+bx+cx^2$
e gli impongo di essere perp. agli altri due.

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \boxed{a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0}$$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Seguo conetto dopo video]

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{b}{6} + \frac{c}{6} = 0}$$

Il polinomio $6x^2 - 6x + 1$ soddisfa ☺
— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 49

Note Title

03/12/2021

Seguatura di forme quadratiche

Data $q(x)$ forma quadr. in n variabili, definiamo

- $m_+ = \max\{\dim V\}$ dove V è un sottospazio su cui $q(x)$ è def. pos., cioè $q(v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$.
- $m_- = \max\{\dim V\}$ dove V ... definita negativa

Caratterizzazione Detta A la matrice che rappresenta q , cioè

$$q(x) = x^t A x = \langle Ax, x \rangle$$

allora $m_+ = \#$ autovalori positivi

$m_- = \#$ autovalori negativi

$\Rightarrow m_0 = \#$ autovalori nulli

Dim. Indichiamo con k il numero di autovalori positivi.

Devo dimostrare due cose

$\rightarrow$ esiste un s.sp. V di dim k su cui $q(x)$ è def. pos. ($m_+ \geq k$)

$\rightarrow$ non esiste un s.sp. V di dim $k+1$ su cui $q(x)$ è def. pos.

Step 1 A è simmetrica. Teo. spettrale $\Rightarrow$ esiste una base ortonormale costituita da autovettori di A . Siano $u_1, \dots, u_k$ gli el.

corrispondenti agli autov. positivi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Dico che $q(x)$ è def. positiva in $V = \text{Span}(u_1, \dots, u_k)$.

Sia $v \in V$. Allora

$$v = c_1 u_1 + \dots + c_k u_k$$

$$Av = c_1 A u_1 + \dots + c_k A u_k = c_1 \lambda_1 u_1 + \dots + c_k \lambda_k u_k$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
 q(v) &= \langle Av, v \rangle \\
 &= \langle c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k, c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \rangle \\
 &= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_k c_k^2 \\
 &\quad (\text{tutti i termini misti se ne sono andati perché} \\
 &\quad \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j) \\
 &> 0 \quad (\text{a meno che } c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0) \\
 &\quad \uparrow \text{qui uso che } \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ sono tutti } > 0.
 \end{aligned}$$

Step 2 Esiste un s.sp. W di dim. $n-k$ su cui $q(x)$ è semidef. negativa, cioè $q(w) \leq 0$ per ogni $w \in W$.

Basta scegliere $W = \text{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$
 $\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
autovettori corrispondenti
ad autovalori ≤ 0

Lo stesso conto di prima porta ad avere

$$q(w) = \lambda_{k+1} c_{k+1}^2 + \dots + \lambda_n c_n^2 \leq 0$$

Step 3 Supponiamo che esista V s.sp. di dim $\geq k+1$ su cui $q(x)$ è def. positiva.

Dico che questo V interseca in modo non banale (cioè non solo in 0) il s.sp. W dello Step 2.

Questo segue da GRASSMANN

$$\begin{aligned}
 \dim(V \cap W) + \underbrace{\dim(V+W)}_{\text{al max è } n} &= \underbrace{\dim V + \dim W}_{\substack{\text{"}k+1\text{" o più} \quad \text{"}n-k\text{"} \\ \hline n+1 \text{ o più}}} \\
 &\downarrow \\
 &\text{questo deve essere} \\
 &\text{almeno 1}
 \end{aligned}$$

Che cosa succede in $V \cap W$?

Deve succedere contemporaneamente che $q > 0$ e $q \leq 0$, il che è assurdo.

— o — o —

Esempio 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la segnatura

Sylvester 2-1-3

$\text{Det}_{1 \times 1} = 2$

$\text{Det}_{2 \times 2} = -1$

$\text{Det}_{3 \times 3} = 0$

C'è almeno un autovalore nullo

Volevamo c'è anche almeno un autov. positivo (traccia = 2)

Guardando la restrizione al 2×2 . Questo è equivalente a considerare la forma $q(x)$ solo rispetto alle prime due variabili, come se avessimo messo $z = 0$.Questa forma ha det -1 , quindi ha segnatura $+-$, quindi esiste un sottospazio di dim 1 su cui $q(x)$ è def. negativa, quindi n_- è almeno uno.Conclusione: autovalori $+ - 0$.Esempio 2 Forma 4×4 . Facendo Sylvester troviamo segni $++0-$

Qual è la segnatura?

 $\text{Det}_{4 \times 4}$ è $-$, quindi le possibilità sono $+++ -$ e $+---$.La seconda si esclude. Perché? Se fosse $+---$ allora $\rightarrow$ esisterebbe un s.sp. W di dim 3 su cui q è < 0 $\rightarrow$ sappiamo che esiste un s.sp. V di dim 2 su cui q è > 0 , ed è il s.sp. generato dalle prime 2 variabili ($\text{Span}(e_1, e_2)$)perché su questo posso applicare Sylvester classico $\uparrow \uparrow$ base canonicaQuesto è assurdo perché $V \cap W$ è non banale per questioni di dimensione.

Esempio 3 Siano V e W s.sp. di $\mathbb{R}^{25}$.

Supponiamo $\dim V = 16$ e $\dim W = 11$.

Quanto può valere $\dim(V \cap W)$?

Risposta: MINIMO 2 MASSIMO 11

$$\text{GRASSMANN} \quad \dim(V \cap W) + \dim(V + W) = \dim V + \dim W$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\underbrace{\quad \quad}_{27}$
 al min 2 al max 25 16 11

Facciamo un esempio in cui è 2

Prendiamo una base $e_1, \dots, e_{25}$. Poniamo

$$V = \text{Span}(e_1, \dots, e_{16}) \rightarrow \dim 16$$

$$W = \text{Span}(e_{15}, e_{16}, \dots, e_{25}) \rightarrow \dim 11$$

$$V + W = \text{tutto } \mathbb{R}^{25} \text{ (c'è tutta una base)}$$

$$\text{Per Grassmann } V \cap W \text{ ha dim 2 } \rightsquigarrow \text{ è Span}\{e_{15}, e_{16}\}$$

Facciamo un esempio in cui è 11

$$V = \text{Span}(e_1, \dots, e_{16})$$

$$W = \text{Span}(e_1, \dots, e_{11})$$

L'intersezione è tutto W .

Facciamo un esempio in cui è 7

$$V = \text{Span}(e_1, \dots, e_{16})$$

$$W = \text{Span}(e_1, \dots, e_7, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25})$$

Con queste scelte

$$V \cap W = \text{Span}(e_1, \dots, e_7) \rightsquigarrow \dim 7$$

$$V + W \rightsquigarrow \dim 20 \rightsquigarrow \text{Span}(e_1, \dots, e_{16}, e_{22}, \dots, e_{25}).$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 50

Note Title

03/12/2021

- Polinomio minimo
- Teorema di HAMILTON-CAYLEY
- Alcune conseguenze

Dato un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

e data A matrice quadrata $n \times n$, ha senso calcolare $p(A)$ nel senso

$$p(A) = a_0 \underset{\text{Id}}{A^0} + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k$$

Il risultato è una matrice $n \times n$.

Domande ① Data una matrice quadrata A , esiste un polinomio non banale per cui $p(A) = 0$
↑ matrice nulla

② Se la prima risposta è sì, come sono fatti tutti i polinomi con quella proprietà?

Risposta ① : SI

Versione facile Consideriamo le matrici

$$\text{Id}, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$$

Queste sono $n^2 + 1$ matrici. Lo spazio delle matrici $n \times n$ ha dim n^2 .

Ma allora le potenze scritte sopra sono lin. dip., dunque

$$c_0 \text{Id} + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$$

per una opportuna scelta dei c_i , non tutti nulli.

Abbiamo così ottenuto un pol. di grado $\leq n^2$ tale che $p(A) = 0$.

Teorema (H-C) (risposta a ④ in versione difficile)

Se $p(x)$ è il polinomio caratteristico di A , allora $p(A) = 0$

(Quindi esiste almeno un polinomio di grado n che annulla A)

Esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A$

$\text{Tr} = 3 \quad \text{Det} = 2 \quad \leadsto \text{autovalori} : 1, 2$

Pol. caratt. = $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

Quindi deve succedere che

$$A^2 - 3A + 2\text{Id} = 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2\text{Id} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{☺}$$

Prendiamo la relazione $A^2 - 3A + 2\text{Id} = 0$ e moltiplichiamo per A^{-1} (che sappiamo esistere poiché $\text{Det} \neq 0$)

Otteniamo

$$A - 3\text{Id} + 2A^{-1} = 0$$

cioè

$$2A^{-1} = 3\text{Id} - A \quad \leadsto \quad A^{-1} = \frac{3}{2}\text{Id} - \frac{1}{2}A$$

In questo modo possiamo SEMPRE calcolare A^{-1} facendo solo potenze di A .

NON DIMOSTRAZIONE DI H-C $p(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda\text{Id})$

Sostituisco $\lambda = A \leadsto p(A) = \text{Det}(A - A) = 0$

[Se questa dimostrazione funzionasse, varrebbe la stessa cosa anche con la traccia]

Caso facile di H-C Caso in cui A è diagonalizzabile, cioè esiste una base di autovettori.

Siano $v_1, \dots, v_n$ tali che $Av_i = \lambda_i v_i$.

$$\text{Quanto fa } A^2 v_i? \rightsquigarrow A^2 v_i = \lambda_i^2 v_i \\ A^3 v_i = \lambda_i^3 v_i$$

e quindi

$$\underbrace{[p(A)](v_i)}_{\substack{\text{matrice ottenuta} \\ \text{sostituendo } A \\ \text{al posto di } x \text{ o } \lambda \\ \text{nel polinomio}}} = p(\lambda_i) v_i$$

$\downarrow$
= 0 se p è il pol. caratteristico e λ_i è autovalore

Questo ci dice che $[p(A)](v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
quindi la matrice $p(A)$, applicata alla base $v_1, \dots, v_n$ fa venire sempre 0, quindi è tutto Ker, quindi $p(A)$ è la matrice nulla.

— 0 — 0 — 0 —

Risposta ② Un teo. misterioso dice che tutti i polinomi con quella proprietà sono multipli di un polinomio di grado, chiamato POLINOMIO MINIMO di A .

Il polinomio minimo ha queste proprietà

- è un divisore del polinomio caratteristico (ovvio dal fatto prec.)
- ha le stesse radici del polinomio caratteristico, eventualmente con molteplicità più piccola (ma sempre almeno 1)
(quindi se le radici del caratt. avevano tutte molt. alg. = 1, allora pol. min. = pol. caratt.)
- pensando a Jordan, la molt. con cui ogni radice compare nel pol. minimo è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a quella radice

Esempio

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^5$$

$$p_m(\lambda) = (\lambda - 3)^3 \uparrow \text{il pi\`u grande blocco \`e da 3}$$

$\uparrow$
minimo

Come pu\`o essere la forma canonico di A ?

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	0	
0	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	0	
0	3	3

Cosa possiamo guardare per decidere?

Se $u_g(3) = 2 \rightsquigarrow 1^\circ \text{ caso}$

Se $u_g(3) = 3 \rightsquigarrow 2^\circ \text{ caso}$

($u_g(\lambda) = \# \text{ blocchi relativi a } \lambda$)

Esempio Come sono fatte tutte le matrici 25×25 tali che

$$A^2 = 3A$$

Risolviamo come $A^2 - 3A = 0$, quindi $q(x) = x^2 - 3x$ annulla la matrice A . Quindi $x^2 - 3x$ \`e un multiplo del pol.

minimo $p_m(A)$. Chi pu\`o essere $p_m(A)$? $x^2 - 3x = x(x - 3)$

- Il polinomio $p_m(x) = x \rightsquigarrow A = 0 \rightsquigarrow A = \text{matrice nulla}$
- Il polinomio $p_m(x) = x - 3 \rightsquigarrow A - 3Id \rightsquigarrow A = 3Id$
- Il polinomio $p_m(x) = x^2 - 3x$.

Come sar\`a fatto il caratteristico? $p(x) = x^a(x - 3)^b$
dove a e b sono almeno 1 e $a + b = 25$.

Quindi gli autovalori di A saranno

$\lambda = 0$ con $u_a(0) = a = u_g(0)$ (i blocchi sono tutti da 1)

$\lambda = 3$ con $u_a(3) = b = u_g(3)$ (i blocchi sono tutti da 1)

Quindi alla fine la forma canonica di A è diagonale con a volte 0 e b volte 3 sulla diagonale.

Dalla forma canonica risalgo alla matrice originaria con il cambio di base

$$A = M^{-1} D M$$

↑
diagonale con solo
0 e 3 sulla diagonale

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 51

Note Title

07/12/2021

Geometria affine

Setting: $\mathbb{R}^n$ come spazio affine

Sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$: sottospazi vettoriali, eventualmente traslati

Esempi In $\mathbb{R}^2$ i sottosp. affini sono

- tutto $\mathbb{R}^2$ (dim 2)
- le rette (non nec. per l'origine) $\leadsto$ dim 1
- i punti (dim 0)

In $\mathbb{R}^3$ i s.sp. affini sono

- tutto $\mathbb{R}^3$ dim 3
- i piani dim 2
- le rette dim 1
- i punti dim 0

Descrizione di un s.sp. affine

CARTESIANA $\leadsto$ mediante equazioni

PARAMETRICA $\leadsto$ mediante Span

Esempio 1 Scrivere nei due modi il s.sp. di $\mathbb{R}^4$ che passa per i punti

$$A=(1,2,3,1) \quad B=(0,1,0,1) \quad C=(2,1,0,0) \quad D=(0,1,1,0)$$

Parametrica:

$$A + t(B-A) + s(C-A) + u(D-A)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 parametri liberi

Per essere sicuri che abbia $\dim = 3$, guardiamo se $B-A, C-A, D-A$ sono lin. indip.

In generale una rapp. param. si presenta nella forma

$$P_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 p.to dato param. liberi

vettori lin. indip

sottosp. affine di $\dim k$

Cartesiana

Dobbiamo trovare l'equazione

Metodo banale $ax + by + cz + dw = e$ $\swarrow$ non passa nec. per l'origine

Sostituisco a (x, y, z, w) i 4 punti dati, ottengo sistema di 4 eq. in 5 incognite. Lo risolvo e ho i coeff., a meno di un grado di libertà (che è ragionevole)

Metodo alternativo Supponiamo di aver scritto la parametrica

$$P_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3$$

Il vettore (a, b, c, d) dei coeff. della cartesiana deve essere $\perp$ ai vettori v_1, v_2, v_3 . Quindi lo cerco o facendo il sistema, o con la formula misteriosa in versione $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & v_1 \\ & v_2 \\ & v_3 \end{pmatrix}$$

Esempio Scrivere in $\mathbb{R}^3$ in forma cartesiana la retta che passa per i punti

$$(1, 0, 2)$$

$$(-1, 3, 4)$$

Parametrica: $(1, 0, 2) + t(-2, 3, 2)$

posso moltiplicarlo per un qualunque $\lambda \neq 0$

Cartesiana: la scrivo come intersezione di 2 piani

$$ax + by + cz = d$$

$$a + 2c = d$$

$$(1, 0, 2)$$

$$-a + 3b + 4c = d$$

$$(-1, 3, 4)$$

$$\begin{cases} a + 2c - d = 0 \\ -a + 3b + 4c - d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2c - d = 0 \\ 3b + 6c - 2d = 0 \end{cases}$$

↑ ↑
variabili libere

$$c=1, d=0 \Rightarrow b=-2, a=d-2c=-2$$

$$c=0, d=3 \Rightarrow b=2, a=d-2c=3$$

$$-2x - 2y + z = 0$$

$$3x + 2y = 3$$

VERIFICA OK

Nota bene: la soluzione del sistema DEVE venire la retta !!

— o — o —

Esempio In $\mathbb{R}^4$ scrivere le eq. del s.sp. affine che passa per

$$A = (1, 0, 0, 1)$$

$$B = (0, 1, 2, 3)$$

$$C = (4, 1, 0, 0)$$

Parametrica

$$A + t(B-A) + s(C-A)$$

$B-A$ e $C-A$ lin. indep

Cartesiana

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = a_5 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4w = b_5 \end{cases}$$

no stesso conto dell'es. prec.

TRASFORMAZIONI AFFINI

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice affine se è del tipo

$$f(x) = Ax + b \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{matrice } n \times n \\ \leftarrow \text{vettore } n \text{ dimensionale} \end{array}$$

Proprietà La composizione di due trasformazioni affini è una trasformazione affine.

Dati

$$\begin{aligned} f_1(x) &= A_1 x + b_1 \\ f_2(x) &= A_2 x + b_2 \end{aligned}$$

Allora

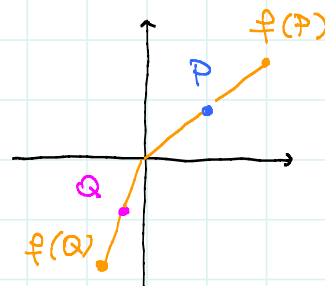
$$\begin{aligned} f_2(f_1(x)) &= A_2(f_1(x)) + b_2 \\ &= A_2(A_1 x + b_1) + b_2 \\ &= \boxed{A_2 A_1} x + \boxed{A_2 b_1 + b_2} \end{aligned}$$

$\uparrow$ nuova matrice (prod. delle due precedenti) $\uparrow$ nuovo vettore b

Esempio 1 OMOTETIA di fattore 2 rispetto all'origine in $\mathbb{R}^2$
 $\uparrow$ "dilatazione"

$$f(x, y) = (2x, 2y)$$

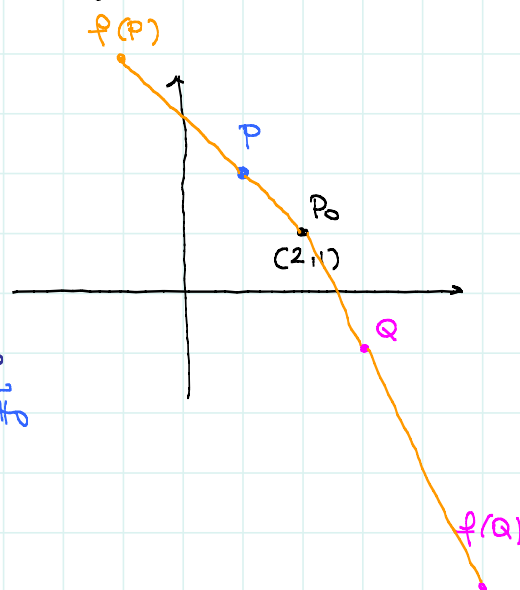
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_b$$



Esempio 2 Omotetia di fattore 3 rispetto a $(2,1)$

Come scrivo l'espressione della trasformazione?

tolgo P_0 multiplico aggiungo di nuovo P_0
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $P \rightsquigarrow \underbrace{P - P_0}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{applicato in} \\ P_0 \text{ che va} \\ \text{verso } P}} \rightsquigarrow \underbrace{3(P - P_0)}_{\substack{\text{precedente} \\ \text{moltiplicato} \\ \text{per } 3}} \rightsquigarrow \underbrace{3(P - P_0) + P_0}_{\substack{\text{sposto tutto} \\ \text{in } P_0}}$



$$P = (x, y)$$

$$\begin{array}{ccccccc} (x, y) & \rightarrow & (x-2, y-1) & \rightarrow & (3x-6, 3y-3) & \rightarrow & (3x-4, 3y-2) \\ P & & P-P_0 & & 3(P-P_0) & & 3(P-P_0)+P_0 \end{array}$$

Conclusione: $f(x, y) = (3x-4, 3y-2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}}_b$

Verifica: il vettore $(2,1)$ deve restare fisso: ok!

Dove va a finire $(1,2)$? $f(1,2) = (-1,4)$ ☺

Oss. Anche se l'omotetia non è rispetto all'origine, la matrice è sempre quella che ci aspettiamo $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
 $\uparrow$
 fattore di dilatazione

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 52

Note Title

07/12/2021

ISOMETRIE

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice ISOMETRIA se conserva le distanze, cioè

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Teorema (Struttura delle isometrie)

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometria. Allora

$$f(x) = Ax + b$$

con A matrice ortogonale.

Oss. preliminare Le matrici ortogonali conservano la norma ed il prodotto scalare (quello classico), cioè

$$\begin{aligned} \langle Ax, Ay \rangle &= \langle x, y \rangle & \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\ \|Ax\| &= \|x\| & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Dim

$$\langle Ax, Ay \rangle = (Ay)^t Ax = y^t \underbrace{A^t A}_{\text{Id}} x = y^t x = \langle x, y \rangle$$

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

↑
def. di
norma

— o — o —

Dim. teo. struttura

Step 1 (Parte facile) Se $f(x) = Ax + b$, con A ortogonale, allora $f(x)$ conserva le distanze. Infatti

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| \\
 &= \|Ax + b - Ay - b\| \\
 &= \|Ax - Ay\| \\
 &= \|A(x - y)\| \\
 &= \|x - y\|
 \end{aligned}$$

↑
visto prima che A conserva la norma

Step 2 Se f conserva le distanze, e in aggiunta $f(0) = 0$, allora f conserva le norme. Infatti

$$\begin{aligned}
 \|f(x)\| &= \text{dist}(f(x), 0) \\
 &= \text{dist}(f(x), f(0)) \\
 &= \text{dist}(x, 0) \\
 &= \|x\|
 \end{aligned}$$

↗ f isometrica

Step 3 Se f conserva le distanze, e in aggiunta $f(0) = 0$, allora f conserva i prodotti scalari. Infatti

$$\begin{aligned}
 \|f(x) - f(y)\|^2 &= \text{dist}(f(x), f(y))^2 \\
 &= \text{dist}(x, y)^2 \\
 &= \|x - y\|^2
 \end{aligned}$$

Espandendo i quadrati:

$$\underbrace{\|f(x)\|^2}_{\|x\|^2} + \underbrace{\|f(y)\|^2}_{\|y\|^2} - 2\langle f(x), f(y) \rangle = \underbrace{\|x\|^2}_{\|x\|^2} + \underbrace{\|y\|^2}_{\|y\|^2} - 2\langle x, y \rangle$$

poiché f conserva la norma

Semplificando

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Step 4 Se f conserva le distanze, e in aggiunta $f(0)=0$, allora f è lineare ed è rappresentata da una matrice ortogonale

Consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^n$: $e_1, \dots, e_n$.

Poniamo

$$\hat{e}_1 = f(e_1), \dots, \hat{e}_n = f(e_n)$$

Allora i vettori $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ sono ortonormali. Infatti

$$\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$\uparrow$
 f conserva
i prod. scalari

Prendiamo un qualunque $x = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$.

La sua immagine sarà $f(x) = \hat{c}_1 \hat{e}_1 + \dots + \hat{c}_n \hat{e}_n$

(occhio: non sto dicendo che $f(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) = c_1 f(e_1) + \dots + c_n f(e_n)$ perché stavo usando che f è LINEARE)

Per concludere mi serve che $\hat{c}_i = c_i$ per $i = 1, \dots, n$

Ma le componenti rispetto ad una base ortonormale sono prodotti scalari, e quindi

$$\hat{c}_i = \langle f(x), \hat{e}_i \rangle = \langle f(x), f(e_i) \rangle = \langle x, e_i \rangle = c_i \quad \text{☺}$$

$\uparrow$
 f conserva il prod. scalare

Questo dimostra che f è lineare, cioè $f(x) = Ax$ per una certa matrice A . Le colonne di A sono $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ ed essendo questi ortonormali, la matrice è per forza ortogonale.

Step 5 Caso generale. Se f conserva le distanze, allora

$$g(x) = f(x) - f(0)$$

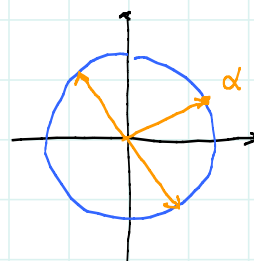
conserva le distanze e verifica $g(0) = 0$, quindi $g(x) = Ax$ con A ortogonale. Ma allora

$$f(x) = g(x) + f(0) = Ax + \underbrace{f(0)}_b$$

— 0 — 0 —

ISOMETRIE DEL PIANO

Come sono fatte le matrici ortogonali nel piano?



$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = S$$

La matrice R ha

$$\rightarrow \det = 1$$

$\rightarrow$ autovalori

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (\cos \alpha - \lambda)^2 + \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow (\cos \alpha - \lambda)^2 = -\sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha - \lambda = \pm i \sin \alpha$$

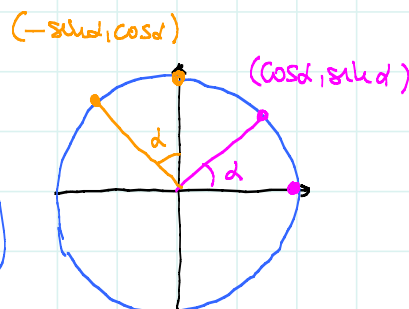
$$\Leftrightarrow \lambda = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

Gli autovalori sono $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$ (due numeri complessi coniugati di modulo 1)

$$\rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$



R = rotazione di angolo α in senso antiorario

La matrice S ha

→ $\det = -1$ e $\text{Tr} = 0$

→ Autovalori = $+1$ e -1

→ è pure simmetrica

→ quindi esiste una base ortonormale u_1, u_2 di $\mathbb{R}^2$ t.c.

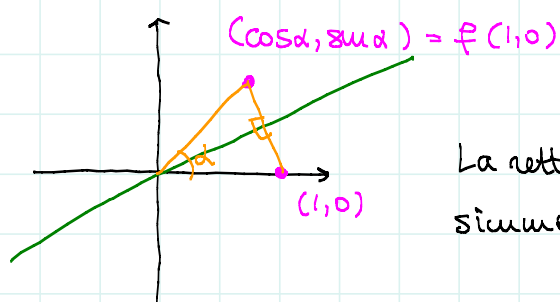
$$Au_1 = u_1$$

$$Au_2 = -u_2$$

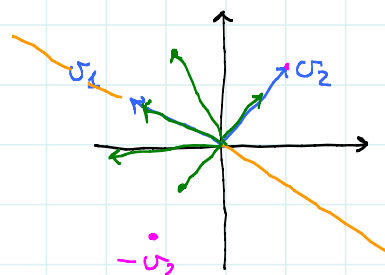
Si tratta quindi della SIMMETRIA rispetto alla retta $\text{Span}(u_1)$

Che cosa rappresenta α ?

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$



La retta rispetto a cui abbiamo fatto la simmetria forma con l'asse x un angolo $\frac{\alpha}{2}$.



Esercizio Scrivere la rotazione di 90° in verso ORARIO rispetto all'origine.

1° modo Osserviamo $f(1,0) = (0,-1)$ e $f(0,1) = (1,0)$.

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $f(x,y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, -x)$

2° modo Ruotare di 90° in senso orario = ruotare di 270° in senso antiorario. Ora uso R con $\alpha = 270^\circ$

— o — o —

ALGEBRA

LINEARE

-

LEZIONE 53

Note Title

07/12/2021

CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE NEL PIANO

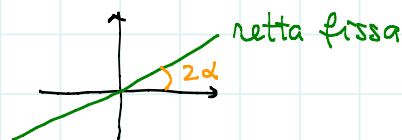
Caso lineare Se in aggiunta $f(0) = 0$, allora ci sono solo 2 casi

→ rotazione di angolo α risp. all'origine (compreso il caso $\alpha = 0$)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ANTIORARIA}$$

→ Simmetria rispetto ad una retta che passa per l'origine

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$



Caso generale $f(x) = Ax + b$ con potenzialmente $b \neq 0$.

Le isometrie si classificano bene sulla base dei punti fissi, cioè le soluzioni di $f(x) = x$, cioè

$$Ax + b = x \quad \leadsto \quad \boxed{(A - Id)x = -b}$$

sistema lineare

Abbiamo varie possibilità

1) P.ti fissi = tutto $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f(x) = \text{Identità}$ ($f(x) = x$ per ogni x)

2) P.ti fissi = una retta $\Rightarrow f(x) = \text{simmetria rispetto alla retta}$

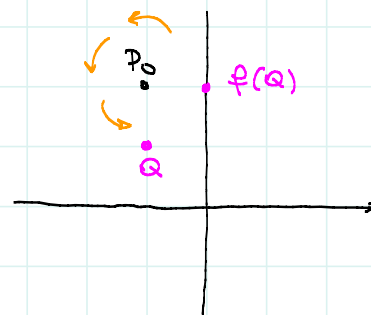
3) Un unico p.to fisso $\Rightarrow f(x) = \text{rotazione intorno al p.to.}$

4) Nessun p.to fisso 4.1) Traslazione $\Rightarrow f(x) = x + b$ con $b \neq 0$

4.2) Simmetria + traslazione parallela alla retta

Esempio 1 Scrivere la rotazione di 90° in senso antiorario rispetto al punto $(-1, 2)$.

$$P \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{sposto} \\ \text{origine in} \\ P_0}} P - P_0 \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{ruoto} \\ \text{con la} \\ \text{matrice}}} \text{Ruoto}(P - P_0) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{riporto} \\ \text{d'origine al suo} \\ \text{posto}}} \text{Ruoto}(P - P_0) + P_0$$



$$(x, y) \rightarrow (x+1, y-2) \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{R \text{ con} \\ \alpha = 90^\circ}} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+2 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (-y+1, x+3)$$

$$\text{Quindi } f(x, y) = (-y+1, x+3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Verifiche: $f(-1, 2) = (-1, 2)$ ok
 $f(Q) = f(-1, 1) = (0, 2)$ ☺

Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $y = 3x$

Prendo base ortogonale con v_1 lungo la retta

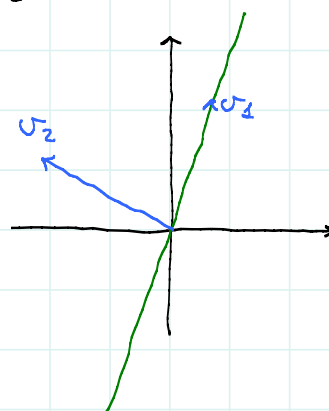
$$v_1 = (1, 3) \quad v_2 = (-3, 1)$$

La simmetria verifica

$$f(v_1) = v_1 \quad f(v_2) = -v_2$$

Nella base v_1, v_2 la matrice sarebbe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Non resta che cambiare base



$$f(x) = Ax \quad \text{con} \quad A = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^{-1} \quad \text{e} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

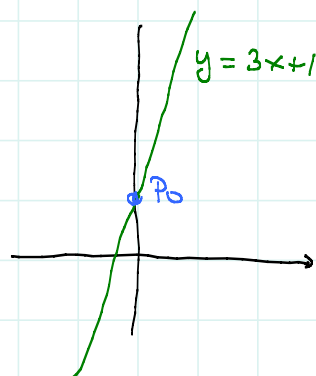
dalla v_1, v_2 alla canonica

Fare il conto per esercizio

Esempio 3 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $y = 3x + 1$

$$P \rightarrow P - P_0 \rightarrow A(P - P_0) \rightarrow A(P - P_0) + P_0$$

dove A è la matrice dell'esercizio precedente.



— o — o —

Perché la classificazione funziona?

[1] Tutti i p.ti sono fissi $\leadsto$ ovvio che $f(x) = x$ per ogni x

[2] I p.ti fissi sono una retta $(A - Id)x = -b$ ha come soluzione una retta

$\Rightarrow$ La matrice $A - Id$ ha $\det = 0$ e $\ker$ di dim 1, quindi 1 è autovalore della matrice, quindi l'altro autovalore è -1 (il $\det$ è ± 1 , essendo ortogonale, e l'altro autov non può essere 1 perché il $\ker$ avrebbe dim 2)

Quindi A è una matrice di simmetria.

Sia x_0 un p.to fisso, cioè $Ax_0 + b = x_0$.

Allora

$$x \rightarrow x - x_0 \xrightarrow[\text{simmetria}]{} A(x - x_0) \rightarrow A(x - x_0) + x_0 = Ax - \underbrace{Ax_0 + x_0}_b$$

[3] C'è un unico p.to fisso x_0

Allora $A - Id$ è invertibile, quindi A non ha l'autovalore 1, quindi non è matrice di simmetria, ma allora è matrice di rotazione con $\alpha \neq 0$. Dico che $f(x)$ è la rotazione intorno a x_0 di angolo α :

$$x \rightarrow x - x_0 \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{not.}}}{A} (x - x_0) \rightarrow A(x - x_0) + x_0 = Ax + b$$

[4] Non ci sono pti fissi

$$(A - Id)x = -b \Rightarrow A - Id \text{ non invertibile, quindi } \det = 0 \\ \text{quindi } 0 \text{ è autovalore di } A - Id.$$

Ci sono 2 possibilità

[4.1] $\text{mg}(0) = 2 \Rightarrow$ è tutto ker $\Rightarrow A = Id \Rightarrow f(x) = x + b$

[4.2] $\text{mg}(0) = 1 \Rightarrow$ L'autovalore 1 ha molteplicità 1 per A ,
quindi A è una matrice di simmetria,
quindi $\text{Rango}(A - Id) = 1$,
quindi se non c'è soluzione b non deve
stare nell'immagine di $(A - Id)$. Ma
l'immagine ha dimensione 1, quindi posso
scrivere

$$b = b_1 + b_2 \leftarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{sta nell'immagine} \end{matrix} \text{ NON sta nell'immagine}$$

[To be completed]

Esempio $f(x, y) = (-x + 12, -y + 8)$ che cos'è questa?

Guarda i pti fissi !! $\begin{cases} -x + 12 = x \\ -y + 8 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 12 \\ 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$

Per forza è una rotazione intorno a $(6, 4)$.

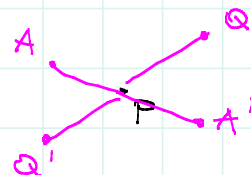
Di che angolo?

La matrice è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \leadsto \alpha = 180^\circ$$

Oroia o antioraria? È lo stesso

Oss. Rotazione di 180° = simmetria centrale

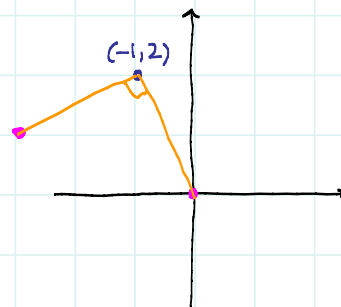


ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 54

Note Title

10/12/2021

Esercizio 1 Scrivere la rotazione di 90° in verso orario rispetto al punto $(-1, 2)$



Strategia generale:

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotazione}}}{A} (P - P_0) \rightsquigarrow A (P - P_0) + P_0$$

In coordinate

$$(x, y) \rightarrow (x+1, y-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2 \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
 $\theta = -90^\circ$

$$\rightsquigarrow (y-3, -x+1)$$

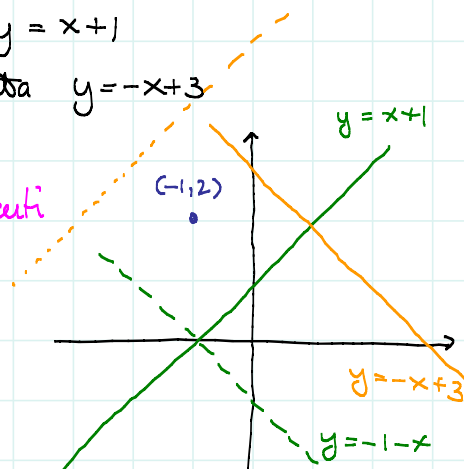
Quindi $f(x, y) = (y-3, -x+1)$ [Verifica: $f(-1, 2) = (-1, 2) \quad \checkmark$
 $f(0, 0) = (-3, 1) \quad \checkmark$]

Domande successive

→ Determinare l'immagine della retta $y = x+1$

→ Determinare la controimmagine della retta $y = -x+3$

SLOGAN: le parametriche vanno bene in avanti
 le cartesiane vanno bene indietro



Prima domanda

Metodo banale: prendo due punti A e B sulla retta data, calcolo $f(A)$ e $f(B)$, poi scrivo la retta per $f(A)$ e $f(B)$

Metodo alternativo: scrivo una rapp. parametrica della retta data

$$(0, 1) + t(1, 1) = (t, 1+t)$$

Sostituisco nella funzione f

$$f(t, 1+t) = (1+t-3, -t+1) = (-2+t, 1-t)$$

Quella che abbiamo ottenuto è la parametrica dell'immagine.

Se voglio la cartesiana, la ricavo

$$x = -2+t \quad \leadsto \quad t = x+2 \quad \leadsto \quad y = 1-x-2 = -1-x$$

$$y = 1-t$$

Seconda domanda

Metodo banale: prendo due punti A e B sulla retta data

$$\text{cerco } C \text{ e } D \text{ tali che } f(C) = A \text{ e } f(D) = B$$

calcolo la retta per C e D.

Metodo alternativo: considero la cartesiana data $y = -x+3$

al posto di x e y sostituisco le due comp. della

$$\text{funzione } f(x, y) = (y-3, -x+1)$$

$$-x+1 = -(y-3)+3 \quad \leadsto \quad -x+1 = -y+6 \quad \leadsto \quad y = x+5$$

Oss. Quando abbiamo, in qualunque dimensione, una trasformazione del tipo

$$f(x) = Ax+b$$

allora l'IMMAGINE di una retta

$$P_0 + tU$$

è la retta

il vettore "velocità" si trasforma con la sola matrice

$$f(P_0 + tU) = A(P_0 + tU) + b = (AP_0 + b) + tAU$$

↑ il punto base usa tutta la trasfor.

Altra domanda: determinare l'immagine della c.r.c. di equazione

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 22$$

Idea: $\rightarrow$ il raggio resta lo stesso (è una isometria)
 $\rightarrow$ basta vedere dove va a finire il centro

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 22 \quad ; \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 22 + 4 + 9$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 35$$

Centro: $(2, -3)$ Raggio: $\sqrt{35}$

$\downarrow$ applico φ

$(-6, -1) \leftarrow$ nuovo centro

La nuova equazione è $(x+6)^2 + (y+1)^2 = 35$

$$\boxed{x^2 + 12x + y^2 + 2y + 2 = 0}$$

Se dovessi fare la centroimmagine il discorso era analogo.

Esercizio 2 Che cosa si ottiene facendo

$\rightarrow$ prima la simmetria rispetto alla retta $y = x + 3$

$\rightarrow$ poi la simmetria rispetto alla retta $2x + 3y = 5$?

Risposta: si ottiene la rotazione rispetto al p.to di intersezione, che in questo caso esiste

La prima trasf. è $f_1(x) = A_1 x + b_1$

La seconda " " $f_2(x) = A_2 x + b_2$

Componendo:

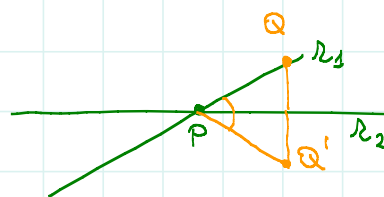
$$f_2(f_1(x)) = \underbrace{A_2 A_1}_{A_3} x + \underbrace{A_2 b_1 + b_2}_{b_3}$$

Ora A_1 e A_2 hanno $\det = -1$ (matrici di simmetria), quindi $\det(A_3) = 1$, quindi A_3 è una matrice di rotazione.

Il p.to di intersezione delle due rette resta fisso, quindi la rotazione è intorno a quel p.to.

Di quale angolo stiamo ruotando?

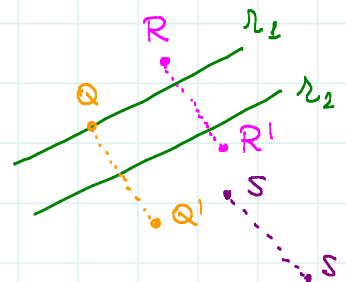
Due volte l'angolo compreso tra le 2 rette!



Esercizio 3 Cosa si ottiene componendo due simmetrie rispetto a due rette parallele?

In questo caso A_3 è la matrice identica, quindi la composizione è una traslazione. Si può vedere che $b_3 = 0$ se e solo se le due rette $\parallel$ sono in realtà la stessa.

Di che cosa sto traslando? In che direzione?



Scego Q su r_1

→ Al primo colpo resta fisso

→ Al secondo colpo trasla di 2 volte la distanza fra r_1 ed r_2 , il tutto $\perp$ alle due rette.

Il punto R finirà in R' con $R' - R = Q' - Q =$ "b della traslazione"

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 55

Note Title

10/12/2021

ISOMETRIE NELLO SPAZIO

Proprietà matrici ortogonali in ogni dimensione

- ① $A^{-1} = A^t$ (una delle 3 possibili definizioni)
- ② $\det(A) = \pm 1$ (conseguenza di $AA^t = Id$ e teo. Binet)
- ③ conservano norma e prod. scalare, cioè

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \text{e} \quad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

- ④ se A manda un certo s.sp. V in se stesso, allora A manda anche $V^\perp$ in se stesso

[Questo segue dalla ③. Infatti, sia $w \in V^\perp$, cioè $\langle w, v \rangle = 0$ per ogni $v \in V$. Ma allora anche $\langle Aw, Av \rangle = 0$

$\Downarrow$

e per concludere ci basta sapere che ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come $A\hat{v}$ per un certo $\hat{v} \in V$. Questo segue dal fatto che le matrici ortogonali sono iniettive e surgettive, avendo $\det \neq 0$]

- ⑤ Gli unici possibili autovalori reali di una matrice ortogonale sono ± 1 .

[Infatti, se $Av = \lambda v$, allora per la proprietà 3 deve essere

$$\|Av\| = \|v\|$$

$$|\lambda| \cdot \|v\| = \|v\| \quad \leadsto \quad |\lambda| = 1 \quad \leadsto \quad \lambda = \pm 1 \quad]$$

- ⑥ In modo quasi analogo si potrebbe vedere che gli eventuali autovalori complessi sono di modulo 1, quindi del tipo

$$\cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

[Dimostrazione analoga alla precedente, solo usando autovettori complessi]

— o — o —

ISOMETRIE LINEARI DI $\mathbb{R}^3$

$$f(x) = Ax$$

↑
matrice 3×3 ortogonale

[In $\mathbb{R}^2$ c'erano solo rotazioni e simmetrie, a seconda del $\det$]

Le tipologie sono

- L'identità
- Simmetrie rispetto ad un piano
- Rotazioni intorno ad una retta
- Rotazioni intorno ad una retta seguite da simmetria rispetto al piano (per l'origine) perpendicolare alla retta

Fatto 1 Almeno un autovalore reale c'è!

(Il pol. caratt. ha grado 3, ed i polinomi di grado dispari hanno almeno una radice reale)

A questo punto si aprono 2 scenari

Primo scenario Solo autovalori reali

- $+1, +1, +1$ $\leadsto$ identità
- $+1, +1, -1$ $\leadsto$ simmetria rispetto all'autospazio di 1
- $+1, -1, -1$ $\leadsto$ rotazione di 180° intorno alla retta "autosp. di 1"
- $-1, -1, -1$ $\leadsto$ -identità, che posso pensare come rotazione di 180° intorno ad una retta, facendo poi simmetria rispetto piano perpendicolare

Secondo scenario Un autovalore reale e 2 complessi coniugati

- Se quello reale è $+1$, allora c'è una retta che resta fissa, e allora per la proprietà ④ anche il piano $\perp$ alla retta va in se, e quindi in quel piano abbiamo una isometria senza autov. reali, quindi una rotazione
- Se quello reale è -1 , allora c'è una retta che va in meno se stessa, e nel piano $\perp$ è una rotazione.

Esempio 1 Consideriamo $f(x, y, z) = (-z, -y, x)$

Quale matrice la rappresenta?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

A = matrice ortogonale
(righe e/o colonne ortonormali)

$\leadsto$ è una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$. Di cosa si tratta?

$\det(A) = -1 \Rightarrow$ dalla classificazione restano 3 possibilità

$\rightarrow$ -identità (e non lo è)

$\rightarrow$ simmetria risp. piano (ma la traccia sarebbe 1)

$\rightarrow$ rotazione seguita da simmetria

Calcoliamo gli autovalori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2(-1-\lambda) + (-1-\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2+1)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\lambda = -1$ $\lambda = \pm i$

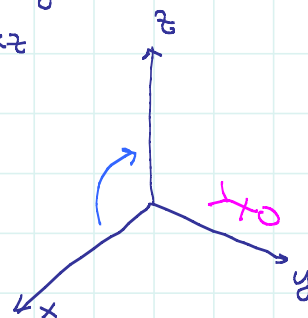
Quindi abbiamo una rotazione di 90° rispetto alla retta generata da un autovettore di -1 .

Si vede a occhio che un autovettore di -1 è $(0, 1, 0)$

Quindi abbiamo: rotazione di 90° rispetto all'asse y
seguita da simm. risp. piano xz

Resta da precisare il verso di rotazione

Dato che $(1, 0, 0) \leadsto (0, 0, 1)$ il verso è quello in figura, cioè orario per un osservatore in piedi lungo asse y positivo



Esempio 2 $f(x, y, z) = (z, x, y)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Matrice ortogonale}$$

$\det(A) = 1$. Ci sono tante possibilità

→ identità → NO

→ autov. $+1, -1, -1$ → NO (traccia = 0)

→ resta una rotazione rispetto ad una retta.

Quale retta? L'autospazio dell'autovalore 1, generato da $(1, 1, 1)$

Di quanto stiamo ruotando?

Gli autovalori sono

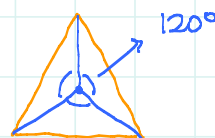
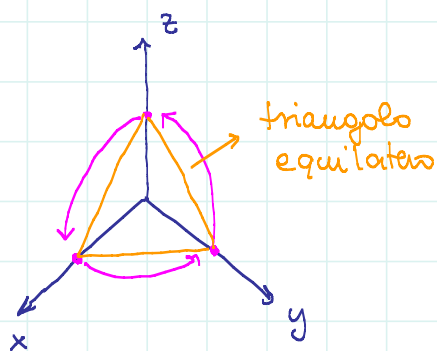
$$+1$$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$\text{Ma allora traccia} = 1 + 2\cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\leadsto \alpha = 120^\circ$$



— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 56

Note Title

14/12/2021

CLASSIFICAZIONE ISOMETRIE DELLO SPAZIO

Caso generale

$$f(x) = Ax + b$$

$\uparrow$ matrice ortogonale 3×3 $\nwarrow$ vettore in $\mathbb{R}^3$

Guardiamo all'insieme dei punti fissi, cioè risolviamo

$$Ax + b = x$$

$$(A - Id)x = -b$$

sistema lineare di 3 equ. in 3 incognite

A seconda delle soluzioni si presentano vari casi.

- 1 L'insieme dei punti fissi ha dim 3 $\leadsto$ tutto $\mathbb{R}^3$ è fisso
 $\leadsto f(x) = \text{identità}$
- 2 L'insieme dei p.ti fissi ha dim 2 $\leadsto$ è un piano
 $\leadsto f(x) = \text{simmetria rispetto a questo piano}$
- 3 L'insieme dei p.ti fissi ha dim 1 $\leadsto$ è una retta
 $\leadsto f(x) = \text{rotazione di un certo angolo intorno alla retta}$
- 4 Esiste un unico p.to fisso
 $\leadsto f(x) = \text{rotazione intorno ad una certa retta seguita da}$
 $\text{simmetria rispetto ad un piano } \perp \text{ alla retta.}$
 (il p.to fisso è l'intersezione tra asse di rotazione
 e piano di simmetria)

[5] Non ci sono p.ti fissi. Qui si aprono 3 sottocasi

[5.1] Traslazione : $f(x) = x + b$ con $b \neq 0$

[5.2] Simmetria rispetto ad un piano seguita da traslazione rispetto ad un vettore $\parallel$ al piano

[5.3] Rotazione rispetto ad una retta seguita da traslazione rispetto ad un vettore $\parallel$ alla retta.

Domande ① Data una descrizione geometrica, trovare l'espressione analitica

② Data l'espressione analitica, capire geometricamente di cosa si tratta (e capire prima se si tratta di isometria)

Come capisco se si tratta di isometria? Guardo se la matrice è ortogonale (righe o colonne devono essere base ortonorm.)

Risposta a ② : cerco i p.ti fissi e guardo gli autovalori della matrice.

Dai p.ti fissi

→ nei casi [1] e [2] ho finito

→ nel caso [3] gli autovalori della matrice sono ± 1 , e poi $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, e α è l'angolo di rotazione

→ nel caso [4] devo stabilire chi sono retta e piano.

Gli autovalori della matrice sono -1 e poi $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$.

Allora

- la retta di rotazione è quella che passa per il p.to fisso e ha come direzione quella dell'autovettore di -1
- il piano è quello $\perp$ alla retta che passa per il p.to fisso.

→ Nel caso **5** guardiamo gli autovettori della matrice.

Tra questi c'è di sicuro $\lambda=1$. Quando $\dim(1)$, che può essere 1, 2, 3

- Se $\dim(1) = 3$, allora $A = Id$ e siamo nel caso **5.1**
- Se $\dim(1) = 2$, allora l'altro è per forza -1 , quindi A è matrice di simmetria e siamo nel 5.2
- Se $\dim(1) = 1$, allora gli altri sono $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$ (questo contiene anche il caso $\alpha = 180^\circ$ in cui diventano -1), ma in ogni caso siamo nel **5.3**

Oss. Se $\det(A) = 1$, i casi possibili sono:

1 **3** **5.1** **5.3**

Se $\det(A) = -1$, i casi possibili sono:

2 **4** **5.2**

Strategia per domanda ①: spostare l'origine in un pto opportuno e poi risolvere il pblm. risp. all'origine

Esempio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano $x=6$

Considero $P_0 \in$ piano, ad esempio $(6, 0, 0)$

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ simmetria rispetto a $x=0$, cioè al piano yz
 $\rightsquigarrow$ aggiungo P_0

Simmetria rispetto piano yz : $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$

Come matrice è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$Ae_1 = -e_1$ } e_1 è $\perp$ al piano e va in
 - se stesso
 $Ae_2 = e_2$ } stanno nel piano yz e
 $Ae_3 = e_3$ } vanno in se stessi

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x-6, y, z) \rightsquigarrow (-x+6, y, z) \rightsquigarrow (-x+12, y, z)$$

$\uparrow$ $P-P_0$ $\uparrow$ simmetria $\uparrow$ aggiungo P_0

Espressione finale $f(x, y, z) = (-x+12, y, z)$

Verifica: cerco i p.ti fissi

$$-x+12 = x \rightsquigarrow x=6$$

$$\left. \begin{array}{l} y = y \\ z = z \end{array} \right\} \begin{array}{l} y \text{ e } z \text{ sono variabili} \\ \text{libere} \end{array}$$

Potrei scrivere le soluzioni come

$$(x, y, z) = (6, t, s) = (6, 0, 0) + t(0, 1, 0) + s(0, 0, 1)$$

Esempio 2 Scrivere la rotazione di 90° intorno alla retta

$$x=2, y=3$$

$\uparrow$
 orario risp. ad un semiasse in piedi
 lungo semiasse positivo delle z

Nota bene: la retta la posso descrivere come $(2, 3, 0) + t(0, 0, 1)$

Rotazione intorno all'asse z

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \theta = -90^\circ$$

Nel nostro caso $P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow R(P-P_0) \rightsquigarrow R(P-P_0)+P_0$

$\uparrow$
 p.to qualunque
 della retta, ad esempio $(2, 3, 0)$

$$(x, y, z) \rightarrow (x-2, y-3, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-3 \\ -x+2 \\ z \end{pmatrix}$$

aggiungo P_0

$\downarrow$
 $\rightsquigarrow$

$$\boxed{(y-1, -x+5, z)}$$

$$\left. \begin{array}{l} y-1 = x \\ -x+5 = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=2 \text{ e } y=3 \\ z=z \end{array}$$

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 57

Note Title

14/12/2021

Esercizio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano

$$2x + y - 3z = 5$$

Sotto-esercizio ... rispetto al piano $2x + y - 3z = 0$,

parallelo al prec., una passa per origine

Scrivo una base del piano

$$v_1 = (1, -2, 0)$$

$$v_2 = (0, 3, 1)$$

La completo ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo un vettore $\perp$ al piano

$$v_3 = (2, 1, -3)$$

La simmetria del sottoesercizio risolve

$$f(v_1) = v_1, \quad f(v_2) = v_2, \quad f(v_3) = -v_3$$

La posso trovare coi soliti metodi, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Volevo semplificare i conti, potevamo scegliere la base in modo che fosse ortonormale. Partiamo rendendola ortogonale con GS

$$\hat{v}_1 = (1, -2, 0)$$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} v_1 = (0, 3, 1) - \frac{-6}{5} (1, -2, 0)$$

$$= \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right)$$

Per non avere frazioni usiamo

$$\hat{v}_2 = (6, 3, 5) \quad [\text{Verifiche: } \perp \text{ al precedente e sta nel piano } \checkmark]$$

$$\hat{v}_3 = (2, 1, -3) \quad (\text{GS non ha correlazioni essendo } \perp \text{ al piano precedente})$$

Volevo posso ortonormalizzare la base dividendo per la norme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \left(\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right) \quad \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

Usando questi 3 vettori per costruire M , a quel p.to $M^{-1} = M^t$

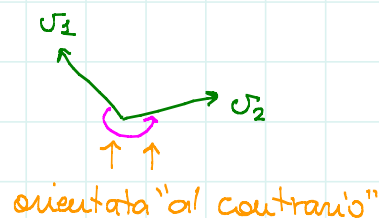
[Controllare che il conto sia lo stesso nei 2 casi]

Passiamo all'esercizio originale. Prendiamo un p.to a caso del piano, ad esempio $(0, 5, 0)$ oppure $(0, 2, -1)$ e usiamo la solita tecnica

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ Simmetria spec. $(P - P_0) \rightsquigarrow$ aggiungiamo P_0

Ponentesi: ORIENTAZIONE DI UNA BASE

Consideriamo le seguenti basi di $\mathbb{R}^2$



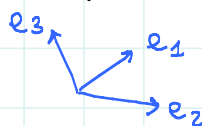
Una base è orientata allo stesso modo della canonica se ottengo v_2 ruotando v_1 di un angolo $< 180^\circ$ in verso antiorario

In termini di matrice di cambio di base

→ se $\text{Det} > 0$, allora le due basi sono orientate allo stesso modo

→ se $\text{Det} < 0$, " " " in modo opposto.

Stesso discorso in $\mathbb{R}^3$ e in qualunque numero di variabili



sono orientate in modo diverso

Esercizio 2 Consideriamo la retta

$$(1, 2, -1) + t(1, 3, 1)$$

Scrivere la notazione intorno a questa retta di 90° in verso orario per un osservatore che sia "in piedi nella direzione $(1, 3, 1)$ "

Sotto-esercizio: fare la stessa cosa con la retta

$$t(1, 3, 1) \leftarrow \text{parallela all'altra, ma passa per l'origine}$$

Imposto il sotto-esercizio. Mi procuro una base di $\mathbb{R}^3$ con

$$v_3 = (1, 3, 1) \quad \text{e} \quad v_1 \text{ e } v_2 \text{ appartenenti al piano } \perp$$

Ad esempio

$$v_1 = (-3, 1, 0) \quad v_2 = (0, -1, 3) \quad v_3 = (1, 3, 1)$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 perpendicolari a v_3

Facciamo meglio: cerchiamo una base ortogonale, poi alla fine pure ortonormale

$$v_1 = (-3, 1, 0) \quad v_2 = (1, 3, -10) \quad v_3 = (1, 3, 1)$$

Per ottenere v_2 posso collegare con GS oppure usare la vecchia formula misteriosa

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \rightsquigarrow (1, 3, -10)$$

Volevo posso / devo ortonormalizzare ottenendo

$$u_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 \right) \quad u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{110}}, \frac{3}{\sqrt{110}}, -\frac{10}{\sqrt{110}} \right)$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right)$$

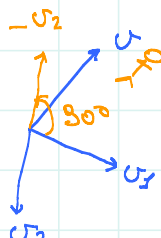
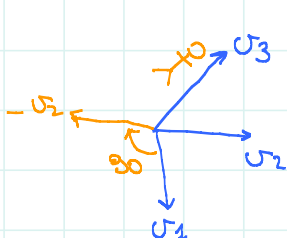
In questa nuova base la matrice è

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = R$$

Ora basta fare $M R M^{-1}$ dove le colonne di M sono u_1, u_2, u_3
(nota che $M^{-1} = M^+$)

Non va ancora bene: se scambio u_1 e u_2 la matrice finale mi viene diversa!!!

Questo va bene se la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ è orientata come quella canonica



Quindi devo controllare il determinante di M . Se viene > 0 , allora il procedimento va bene.

Se viene negativo, basta scambiare u_1 e u_2

Controlliamo orientazione di

$$u_1 = (-3, 1, 0)$$

$$u_2 = (1, 3, -10)$$

$$u_3 = (1, 3, 1)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -9 - 10 - 1 - 30 < 0$$

$\leadsto$ la base era orientata al contrario.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 58

Note Title

14/12/2021

DISTANZA TRA DUE RETTE SGHEMBE

(= minima distanza tra un p.to della prima e un p.to della seconda)

Calcolare la distanza tra le rette dello spazio

$$(1, 0, -1) + t(1, 2, -1)$$

$$(0, 1, -2) + s(4, -1, 0)$$

Perché sono sghembe? Le direzioni sono lin. indep. Questo esclude che siano // oppure coincidenti.

Resta da escludere che siano incidenti. Impongo l'intersezione

$$\begin{array}{rclcl} 1+t & = & 4s & & 4s = 2 & s = 1/2 & \Rightarrow \text{NO SOL.} \\ 2t & = & 1-s & \nearrow & 1-s = 2 & s = -1 \\ -1-t & = & -2 & \leadsto & t = 1 \end{array}$$

1° modo Scriviamo la distanza al quadrato tra un p.to P della prima e un p.to Q della seconda

$$(1+t-4s)^2 + (2t-1+s)^2 + (-1-t+2)^2$$

$$= 1 + t^2 + 16s^2 + 2t - 8s - 8ts + 4t^2 + 1 + s^2 - 4t + 4ts - 2s + 1 - 2t + t^2$$

$$= 6t^2 + 17s^2 - 4t - 10s - 4st + 3$$

Cerco il minimo di questa espressione al variare di t ed s.

Per questo provo a scriverlo come somma di quadrati

$$= 6 \left(t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}st \right) + 17s^2 - 10s + 3$$

$$6 \left[\left(t - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s \right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}s^2 - \frac{2}{9}s \right] + 17s^2 - 10s + 3$$

$$= 6 \left(t - \frac{1}{3}s - \frac{1}{3} \right)^2 + \underbrace{\left(17 - \frac{1}{9} \right) s^2 + \left(-10 - \frac{2}{9} \right) s + 3 - \frac{1}{9}}_{\text{lo posso scrivere come } (17 - \frac{1}{9})(s+a)^2 + b}$$

Quando è minimo tutto questo? Quando i 2 quadrati fanno 0, quindi

$$s = -a \quad \text{e} \quad t - \frac{1}{3}s - \frac{1}{3} = 0$$

→ sistema lineare → trovo t ed s e ho finito.

2° modo Consideriamo P sulla prima retta e Q sulla seconda tali che PQ sia la minima distanza.

Allora il segmento PQ è $\perp$ alle due rette.

Dandolo per buono, cosa devo imporre?

$$P = (1+t, 2t, -1-t)$$

$$Q = (4s, 1-s, -2)$$

$$P-Q = (1+t-4s, 2t-1+s, 1-t) \text{ deve essere } \perp \text{ a } (1, 2, -1) \text{ e } (4, -1, 0)$$

$$\begin{cases} 1+t-4s+4t-2+2s-1+t = 0 \\ 4+4t-16s-2t+1-s = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sistema lineare} \rightarrow \text{trovo } t \text{ ed } s \\ \text{e ho finito} \end{array}$$

[Fare il conto e vedere che viene lo stesso]

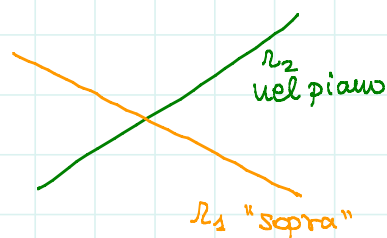
3° modo Esiste un unico piano che contiene la seconda retta e non interseca la prima.

Come lo trovo? In parametrica è

$$(0, 1, -2) + s(4, -1, 0) + t(1, 2, -1)$$

↑ ↑
direzioni delle due rette date

A questo punto, se il piano è quello orizzontale la situazione è, vista dall'alto, come in figura. La minima distanza è realizzata dal segmento verticale che congiunge i 2 pti di incontro.



Morale: basta calcolare la distanza tra un qualunque pto di r_1 e il piano trovato prima.

↑
ad esempio $(1, 0, -1)$

Ad esempio possiamo usare la formula nota dell'eq. cartesiana del piano, che ottengo

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, 4, 9) \rightsquigarrow (a, b, c) \text{ del piano}$$

$$x + 4y + 9z = -14, \text{ quindi } x + 4y + 9z + 14 = 0$$

↑
impongo passaggio per pto $(0, 1, -2)$

$$\text{Formula dist} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dots$$

VOLUME DEL TETRAEDRO

↑
piramide a base
triangolare



Det. volume del tetraedro con vertici in

$$A = (0, 1, 0) \quad B = (2, 1, 0) \quad C = (3, 1, 1) \quad D = (2, 3, 0)$$

1° modo Penso come base il triangolo ABC. Poi calcolo

→ l'area del triangolo (ci sono tanti modi di farla)

→ la lunghezza dell'altezza

A quel pto

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Area base} \cdot \text{altezza}$$

Per calcolare la lunghezza dell'altezza calcolo la distanza di D dal piano ABC , in uno dei vari modi possibili, cioè

- con la formula dopo aver scritto la cartesiana del piano
- come distanza tra D ed H , dove H è l'intersezione tra il piano e la retta per D perpendicolare al piano.

2° modo Calcolo i 3 vettori $B-A$, $C-A$, $D-A$ (posso anche usare un altro punto invece di A)

e poi prendo il valore assoluto del Det della matrice che li ha come righe/colonne e divido per 6.

[Facendo i conti si vede che coincide con il precedente, ed è alla base dell'interpretazione geometrica del determinante]

3° modo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Volume} = \frac{1}{6} |\text{Det}|$$

↑
aggiunto in fondo

Se la lavoro alla Gauss

$$\begin{pmatrix} A & 1 \\ B-A & 0 \\ C-A & 0 \\ D-A & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi alla fine è come il 2° modo.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 59 (-2)

Note Title

17/12/2021

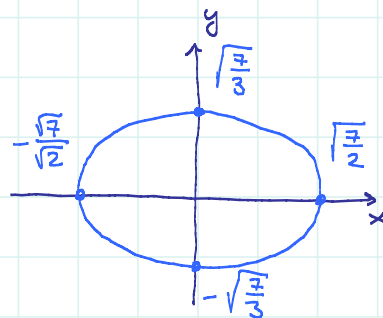
Esempio 0 Determinare l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$2x^2 + 3y^2 = 7$$

Si tratta di un'ellisse con semiassi

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \text{ lungo asse } x$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \text{ lungo asse } y$$



Volendo si può riscrivere come $\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_u + \underbrace{(\sqrt{3}y)^2}_v = 7$

Nelle variabili u e v l'ellisse diventa la circonferenza $u^2 + v^2 = 7$.

Detto in termini di trasformazioni, l'affinità

$$F(x, y) = (\sqrt{2}x, \sqrt{3}y)$$

è tale che l'immagine inversa della circonferenza è l'ellisse, e quindi l'imm. dell'ellisse è la circonferenza.

Esempio 1 Stessa cosa con l'equazione

$$2x^2 + 5y^2 - 6xy = 7$$

A sinistra abbiamo una forma quadratica

in (x, y) di matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\text{Tr} = 7$, $\text{Det} = 1$ Autovalori: ++ no definita positiva.

Per calcolarli risolvo

$$\lambda^2 - \overset{\uparrow \text{Tr}}{7}\lambda + \overset{\uparrow \text{Det}}{1} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-4}}{2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Per il teorema spettrale esiste una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^2$ in cui la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Se indiciamo con u e v le componenti di (x,y) rispetto alla nuova base, allora

$$2x^2 + 5y^2 - 6xy$$

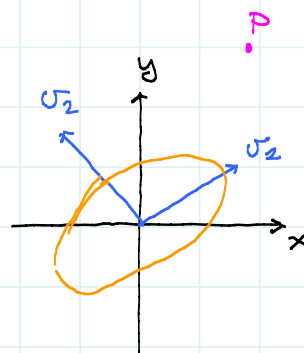
diventa

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

Quindi nella nuova base l'insieme è descritto da

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 7$$

e quindi è un'ellisse con semiasse $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\lambda_1}}$ e $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\lambda_2}}$.



Nota bene: v_1 e v_2 sono gli autovettori della matrice.

Come calcolo u e v in funzione di x e y ? Usando la matrice M di cambio di base, cioè quella che ha come colonne le componenti di v_1 e v_2 (in realtà qui serve l'inversa).

Esempio 2 Stessa cosa con

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x - 3y = 18$$

Idea: con una traslazione possiamo (provare a) eliminare i termini di 1° grado

$$u = x + a \quad v = y + b$$

$$\text{cioè } f(x, y) = (x + a, y + b)$$

L'origine nelle coordinate (u, v) è il pto $(-a, -b)$ nelle coord. (x, y) .

Invertendo:

$$x = u - a \quad y = v - b$$

e sostituendo

$$(u - a)^2 + 4(v - b)^2 - 2(u - a)(v - b) + 6(u - a) - 3(v - b) = 18$$

$$\begin{aligned} u^2 - 2au + a^2 + 4v^2 - 8bv + 4b^2 - 2uv + 2bu + 2av - 2ab \\ + 6u - 6a - 3v + 3b = 18 \end{aligned}$$

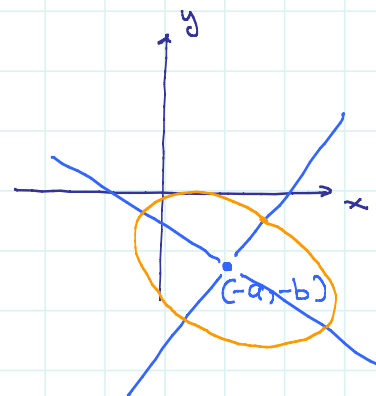
Quindi devo imporre

$$\begin{cases} -2a + 2b + 6 = 0 \\ -8b + 2a - 3 = 0 \end{cases} \leadsto \text{risolvendo trovo in modo unico } a \text{ e } b$$

A quel punto siamo nell'esercizio precedente.

Alla fine potrebbe essere come in figura

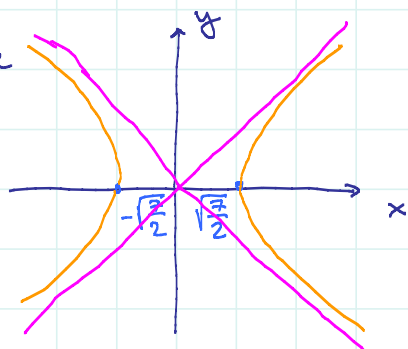
(se la segnatura è ++)



Esempio 4

$$2x^2 - 3y^2 = 7$$

Iperbole



Gli asintoti sono le rette

$$2x^2 - 3y^2 = 0$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y) = 0$$

$$\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$$

Esempio 4-bis

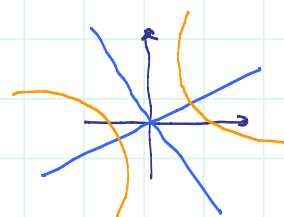
$$2x^2 + 5y^2 - 8xy = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\text{Tr} = 7$ $\text{Det} = -6 \leadsto$ autovalori: + -

Rispetto ad una opportuna base ORTONORMALE, il luogo geometrico diventa

$$a u^2 - b v^2 = 7$$



dove a e $-b$ sono gli autovalori della matrice, e (u, v) sono le componenti rispetto alla nuova base.

I nuovi asintoti saranno

$$\sqrt{a} u \pm \sqrt{b} v = 0$$

— 0 — 0 —

MOLTO BORDER LINE

Sappiamo fare le potenze di una matrice A quadrata.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots$$

Quindi, purché io, $e^A = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots$
 spero che converga

Oss. chiave: se A è diagonale, cioè $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$

allora

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & \ddots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Stessa cosa per $\sin(A)$ e $\cos(A)$. Più in generale

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Se A non è diagonale, ma diagonalizzabile, basta cambiare base.
 — 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 60 (-1)

3

Note Title

17/12/2021

CODIFICA JPEG E CAMBI DI BASE (vedi pagina WIKIPEDIA)

Immagine : tabella di numeri

FULL HD : 1920×1080 .

Il "colore" di un pixel è descritto da 3 numeri (ad esempio nel modello RGB)

ciascuno dei quali occupa un bite

Una immagine FULL HD ~ 6 MB

Tradotto : ogni immagine sono 3 matrici (R-G-B)

Se l'immagine è B/N possiamo dire che è una sola matrice.

1° passo Si scompone in blocchi 8×8 .

Un blocco 8×8 è uno sp. vettoriale dim. 64

Una base è costituita dalle 64 matrici "canoniche" che hanno un 1 e 63 zeri.

(come se fossero una tabella 8×8 tutta bianca tranne una casella nera)

Teoricamente dovrei trasmettere 64 numeri. Come posso risparmiare?

1° modo : riduco la risoluzione, ad esempio passando a 4×4 , cioè "compatto" quadrati 2×2 adiacenti.

2° modo : riduco il campionamento, cioè invece di usare $0, 1, 2, \dots, 255$ uso solo $0, 4, 8, 12, \dots, 252$

3° modo più furbo : cambio base ed uso una base "migliore" rispetto alla quale trasmetto solo le comp. "più importanti", o che faccio una riduzione di campionamento diversa a seconda delle componenti.

La base "giusta" la produce il tes. sp. a partire da un'applic. simmetrica : quella che sostituisce ogni elemento della matrice con la somma dei 4 vicini NSWE

Esercizio Dimostrare che è simmetrica! (Avrebbe una matrice 64×64)

Esercizio Consideriamo vettori lunghi 4 e sostituiamo ogni elemento con la somma dei due vicini.
Al bordo immaginiamo di "riflettere" il vettore

d c b a | a b c d | d c b a

$$(a, b, c, d) \rightarrow (a+b, a+c, b+d, c+d)$$

questa è una applic. simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori della matrice sopra sono gli stessi della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Fatto generale: gli autovettori di A e di $A - 2Id$

sono gli stessi, e gli autovalori cambiano di due

$f(a, b, c, d) =$ sostituisco ogni numero con la somma dei due vicini - 2 volte lui.

È un po' come fare $\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - 2\varphi(x)$

Se invece di farlo di 1, lo faccio di h , diventa

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x) &= \varphi''(x) h^2 \\ \text{"} & \quad \swarrow \varphi(x) - \varphi'(x)h + \frac{1}{2}\varphi''(h^2) \\ \varphi(x) + \varphi'(x)h + \frac{1}{2}\varphi''(x)h^2 \end{aligned}$$

A-2 Id sui vettori è una specie di derivata seconda

$\sin(kx)$ e $\cos(kx)$ sono "autovettori" della derivata seconda
idem e^{kx}