

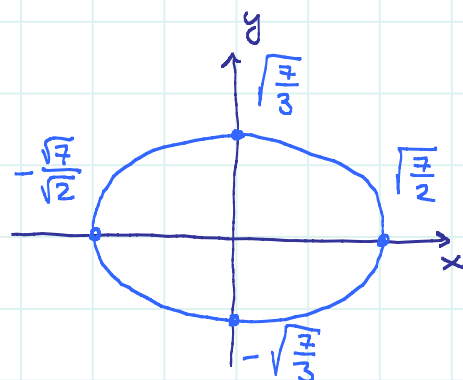
Esempio 0 Determinare l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$2x^2 + 3y^2 = 7$$

Si tratta di un'ellisse con semiasse

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ lungo asse x

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ lungo asse y



Volendo si può riscrivere come $(\underbrace{\sqrt{2}x}_u)^2 + (\underbrace{\sqrt{3}y}_v)^2 = 7$

Nelle variabili u e v l'ellisse diventa la circonferenza $u^2 + v^2 = 7$.

Detto in termini di trasformazioni, l'affinità

$$f(x, y) = (\sqrt{2}x, \sqrt{3}y)$$

è tale che l'immagine inversa della circonferenza è l'ellisse, e quindi l'imm. dell'ellisse è la circonferenza.

Esempio 1 Stessa cosa con l'equazione

$$2x^2 + 5y^2 - 6xy = 7$$

A sinistra abbiamo una forma quadratica

in (x, y) di matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\text{Tr} = 7$, $\text{Det} = 1$ Autovalori: ++ no definita positiva.

Per calcolarli risolvo

$$\lambda^2 - \overset{\uparrow -\text{Tr}}{7}\lambda + \overset{\uparrow \text{Det}}{1} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-4}}{2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Per il teorema spettrale esiste una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^2$ in cui la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Se indiciamo con u e v le componenti di (x,y) rispetto alla nuova base, allora

$$2x^2 + 5y^2 - 6xy$$

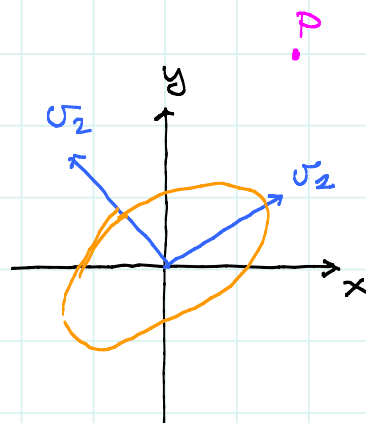
diventa

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

Quindi nella nuova base l'insieme è descritto da

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 7$$

e quindi è un'ellisse con semiasse $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\lambda_1}}$ e $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\lambda_2}}$.



Nota bene: v_1 e v_2 sono gli autovettori della matrice.

Come calcolo u e v in funzione di x e y ? Usando la matrice M di cambio di base, cioè quella che ha come colonne le componenti di v_1 e v_2 (in realtà qui serve l'inversa).

Esempio 2 Stessa cosa con

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x - 3y = 18$$

Idea: con una traslazione possiamo (provare a) eliminare i termini di 1° grado

$$u = x + a \quad v = y + b$$

$$\text{cioè } f(x, y) = (x + a, y + b)$$

L'origine nelle coordinate (u, v) è il pto $(-a, -b)$ nelle coord. (x, y) .

Invertendo:

$$x = u - a \quad y = v - b$$

e sostituendo

$$(u - a)^2 + 4(u - b)^2 - 2(u - a)(v - b) + 6(u - a) - 3(v - b) = 18$$

$$\begin{aligned} u^2 - 2au + a^2 + 4v^2 - 8bv + 4b^2 - 2uv + 2bu + 2av - 2ab \\ + 6u - 6a - 3v + 3b = 18 \end{aligned}$$

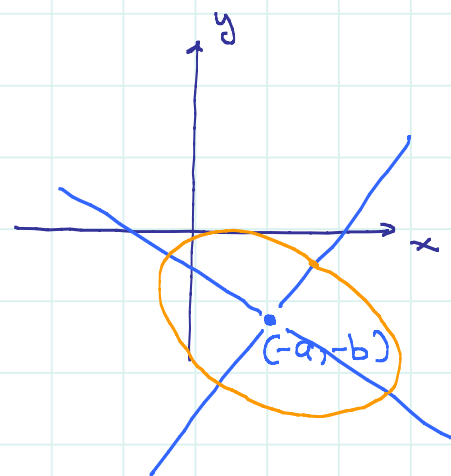
Quindi devo imporre

$$\begin{cases} -2a + 2b + 6 = 0 \\ -8b + 2a - 3 = 0 \end{cases} \leadsto \text{risolvendo trovo in modo unico } a \text{ e } b$$

A quel punto siamo nell'esercizio precedente.

Alla fine potrebbe essere come in figura

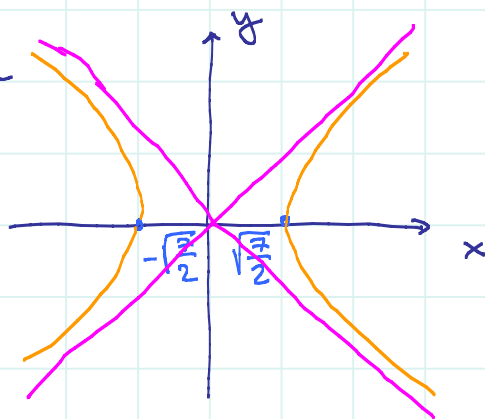
(se la segnatura è ++)



Esempio 4

$$2x^2 - 3y^2 = 7$$

Iperbole



Gli asintoti sono le rette

$$2x^2 - 3y^2 = 0$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y) = 0$$

$$\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$$

Esempio 4-bis

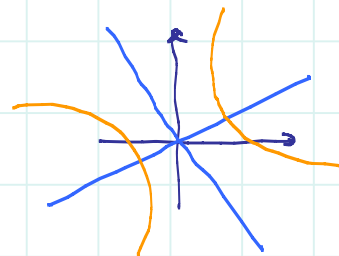
$$2x^2 + 5y^2 - 8xy = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\text{Tr} = 7$ $\text{Det} = -6 \leadsto$ autovalori: + -

Rispetto ad una opportuna base ORTONORMALE, il luogo geometrico diventa

$$a u^2 - b v^2 = 1$$



dove a e $-b$ sono gli autovalori della matrice, e (u, v) sono le componenti rispetto alla nuova base.

I nuovi asintoti saranno

$$\sqrt{a} u \pm \sqrt{b} v = 0$$

— 0 — 0 —

MOLTO BORDER LINE

Sappiamo fare le potenze di una matrice A quadrata.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots$$

Quindi, purché io, $e^A = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots$
 spero che converga

Oss. chiave: se A è diagonale, cioè $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

allora

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Stessa cosa per $\sin(A)$ e $\cos(A)$. Più in generale

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Se A non è diagonale, ma diagonalizzabile, basta cambiare base.
 — 0 — 0 —