

DISTANZA TRA DUE RETTE SGHEMBE

(= minima distanza tra un p.to della prima e un p.to della seconda)

Calcolare la distanza tra le rette dello spazio

$$(1, 0, -1) + t(1, 2, -1)$$

$$(0, 1, -2) + s(4, -1, 0)$$

Perché sono sghembe? Le direzioni sono lin. indep. Questo esclude che siano // oppure coincidenti.

Resta da escludere che siano incidenti. Imposto d'intersezione

$$1+t = 4s$$

$$4s = 2$$

$$s = 1/2$$

=> NO SOL.

$$2t = 1-s$$

↗

$$1-s = 2$$

$$s = -1$$

$$-1-t = -2$$

$$\leadsto t = 1$$

1° modo

Scriviamo la distanza al quadrato tra un p.to P della prima e un p.to Q della seconda

$$(1+t-4s)^2 + (2t-1+s)^2 + \frac{(-1-t+2)^2}{(1-t)^2}$$

$$= 1 + \cancel{t^2} + \cancel{16s^2} + \cancel{2t} - \cancel{8s} - \cancel{8ts} + \cancel{4t^2} + \cancel{1+s^2} - \cancel{4t} + \cancel{4ts} - \cancel{2s} + \cancel{1-2t+t^2}$$

$$= \cancel{6t^2} + 17s^2 - \cancel{4t} - 10s - \cancel{4st} + 3$$

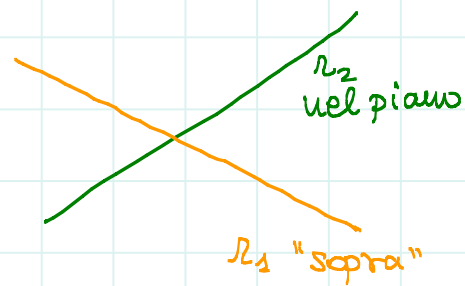
Cerco il minimo di questa espressione al variare di t ed s.

Per questo provo a scriverlo come somma di quadrati

$$= 6\left(t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}st\right) + 17s^2 - 10s + 3$$

$$6\left[\left(t - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}s^2 - \frac{2}{9}s\right] + 17s^2 - 10s + 3$$

A questo punto, se il piano è quello orizzontale la situazione è, vista dall'alto, come in figura. La minima distanza è realizzata dal segmento verticale che congiunge i 2 pti di incontro.



Morale: basta calcolare la distanza tra un qualunque pto di r_1 e il piano trovato prima.

↑
ad esempio $(1, 0, -1)$

Ad esempio possiamo usare la formula nota dell'eq. cartesiana del piano, che ottengo

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, 4, 9) \rightsquigarrow (a, b, c) \text{ del piano}$$

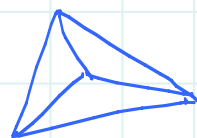
$$x + 4y + 9z = -14, \text{ quindi } x + 4y + 9z + 14 = 0$$

↑
impongo passaggio per pto $(0, 1, -2)$

$$\text{Formula dist} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dots$$

VOLUME DEL TETRAEDRO

↑
piramide a base triangolare



Det. volume del tetraedro con vertici in

$$A = (0, 1, 0) \quad B = (2, 1, 0) \quad C = (3, 1, 1) \quad D = (2, 3, 0)$$

1° modo Penso come base il triangolo ABC. Poi calcolo

→ l'area del triangolo (ci sono tanti modi di farla)

→ la lunghezza dell'altezza

A quel p.to

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Area base} \cdot \text{altezza}$$

Per calcolare la lunghezza dell' altezza calcolo la distanza di D dal piano ABC, in uno dei vari modi possibili, cioè

- con la formula dopo aver scritto la cartesiane del piano
- come distanza tra D ed H, dove H è l'intersezione tra il piano e la retta per D perpendicolare al piano.

2° modo Calcolo i 3 vettori $B-A$, $C-A$, $D-A$ (posso anche usare un altro punto invece di A)

e poi prendo il valore assoluto del Det della matrice che li ha come righe / colonne e divido per 6.

[Facendo i conti si vede che coincide con il precedente, ed è alla base dell' interpretazione geometrica del determinante]

3° modo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑
aggiunto in fondo

$$\text{Volume} = \frac{1}{6} |\text{Det}|$$

Se la lavoro alla Gauss

$$\begin{pmatrix} A & 1 \\ B-A & 0 \\ C-A & 0 \\ D-A & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi alla fine è come il 2° modo.

— 0 — 0 —