

Esercizio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano

$$2x + y - 3z = 5$$

Sotto-esercizio ... rispetto al piano $2x + y - 3z = 0$,

parallelo al prec., una passa per origine

Scrivo una base del piano

$$v_1 = (1, -2, 0)$$

$$v_2 = (0, 3, 1)$$

La completo ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo un vettore $\perp$ al piano

$$v_3 = (2, 1, -3)$$

La simmetria del sottoesercizio risolve

$$f(v_1) = v_1, \quad f(v_2) = v_2, \quad f(v_3) = -v_3$$

La posso trovare coi soliti metodi, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Volendo semplificare i conti, potevamo scegliere la base in modo che fosse ortonormale. Partiamo rendendola ortogonale con GS

$$\hat{v}_1 = (1, -2, 0)$$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} v_1 = (0, 3, 1) - \frac{-6}{5} (1, -2, 0)$$

$$= \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right)$$

Per non avere frazioni usiamo

$$\hat{v}_2 = (6, 3, 5) \quad [\text{Verifiche: } \perp \text{ al precedente e sta nel piano :)]$$

$$\hat{v}_3 = (2, 1, -3) \quad (\text{GS non ha correlazioni essendo } \perp \text{ al piano precedente})$$

Volevo posso ortormalizzare la base dividendo per le norme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \left(\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right) \quad \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

Usando questi 3 vettori per costruire M , a quel p.to $M^{-1} = M^t$

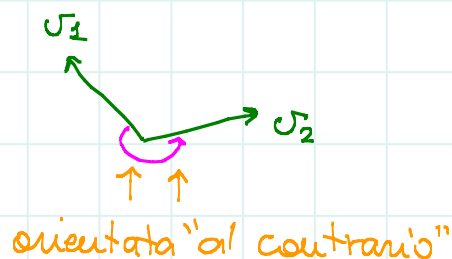
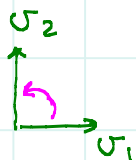
[Controllare che il conto sia lo stesso nei 2 casi]

Passiamo all'esercizio originale. Prendiamo un p.to a caso del piano, ad esempio $(0, 5, 0)$ oppure $(0, 2, -1)$ e usiamo la solita tecnica

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ Simmetria spec. $(P - P_0) \rightsquigarrow$ aggiungiamo P_0

Parenthesi: ORIENTAZIONE DI UNA BASE

Consideriamo le seguenti basi di $\mathbb{R}^2$



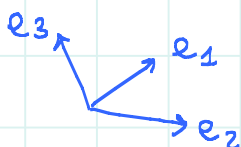
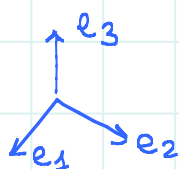
Una base è orientata allo stesso modo della canonica se ottengo v_2 ruotando v_1 di un angolo $< 180^\circ$ in verso antiorario

In termini di matrice di cambio di base

→ se $\text{Det} > 0$, allora le due basi sono orientate allo stesso modo

→ se $\text{Det} < 0$, " " " in modo opposto.

Stesso discorso in $\mathbb{R}^3$ e in qualunque numero di variabili



sono orientate in modo diverso

Esercizio 2 Consideriamo la retta

$$(1, 2, -1) + t(1, 3, 1)$$

Scrivere la rotazione intorno a questa retta di 90° in verso orario per un punto che sia "in piedi nella direzione $(1, 3, 1)$ "

Sotto-esercizio: fare la stessa cosa con la retta

$$t(1, 3, 1) \leftarrow \text{parallela all'altra, ma passa per l'origine}$$

Imposto il sotto-esercizio. Mi procuro una base di $\mathbb{R}^3$ con

$$v_3 = (1, 3, 1) \quad \text{e} \quad v_1 \text{ e } v_2 \text{ appartenenti al piano } \perp$$

Ad esempio

$$v_1 = (-3, 1, 0) \quad v_2 = (0, -1, 3) \quad v_3 = (1, 3, 1)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
perpendicolari a v_3

Facciamo meglio: cerchiamo una base ortogonale, poi alla fine pure ortonormale

$$v_1 = (-3, 1, 0) \quad v_2 = (1, 3, -10) \quad v_3 = (1, 3, 1)$$

Per ottenere v_2 posso correggere con GS oppure usare la vecchia formula misteriosa

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \rightsquigarrow (1, 3, -10)$$

Volendo posso / devo ortonormalizzare ottenendo

$$v_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right) \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{110}}, \frac{3}{\sqrt{110}}, -\frac{10}{\sqrt{110}}\right)$$

$$v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

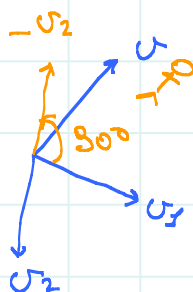
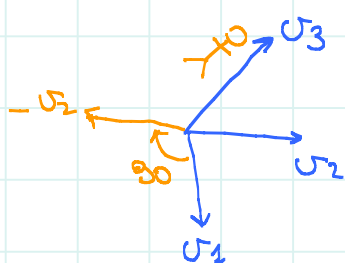
In questa nuova base la matrice è

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = R$$

Ora basta fare $M R M^{-1}$ dove le colonne di M sono v_1, v_2, v_3
(nota che $M^{-1} = M^T$)

Non va ancora bene: se scambio v_1 e v_2 la matrice finale mi viene diversa!!!

Questo va bene se la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è orientata come quella canonica



Quindi devo controllare il determinante di M . Se viene > 0 , allora il procedimento va bene.

Se viene negativo, basta scambiare v_1 e v_2

Controlliamo orientazione di

$$v_1 = (-3, 1, 0)$$

$$v_2 = (1, 3, -10)$$

$$v_3 = (1, 3, 1)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -3 - 10 - 1 - 30 < 0$$

$\leadsto$ la base era orientata al contrario.

— 0 — 0 —