

CLASSIFICAZIONE ISOMETRIE DELLO SPAZIO

Caso generale

$$f(x) = Ax + b$$

$\uparrow$
matrice
ortogonale 3×3

$\nwarrow$ vettore in $\mathbb{R}^3$

Guardiamo all'insieme dei punti fissi, cioè risolviamo

$$Ax + b = x$$

$$(A - Id)x = -b$$

sistema lineare di 3 equ. in 3 incognite

A seconda delle soluzioni si presentano vari casi.

1] L'insieme dei punti fissi ha dim 3 $\leadsto$ tutto $\mathbb{R}^3$ è fisso
 $\leadsto f(x) = \text{identità}$

2] L'insieme dei p.ti fissi ha dim 2 $\leadsto$ è un piano
 $\leadsto f(x) = \text{simmetria rispetto a questo piano}$

3] L'insieme dei p.ti fissi ha dim 1 $\leadsto$ è una retta
 $\leadsto f(x) = \text{rotazione di un certo angolo intorno alla retta}$

4] Esiste un unico p.to fisso

$\leadsto f(x) = \text{rotazione intorno ad una certa retta seguita da}$
 $\text{simmetria rispetto ad un piano } \perp \text{ alla retta.}$

(il p.to fisso è l'intersezione tra asse di rotazione
e piano di simmetria)

5) Non ci sono p.ti fissi. Qui si aprono 3 sottocasi

5.1) Traslazione : $f(x) = x + b$ con $b \neq 0$

5.2) Simmetria rispetto ad un piano seguita da traslazione rispetto ad un vettore $\parallel$ al piano

5.3) Rotazione rispetto ad una retta seguita da traslazione rispetto ad un vettore $\parallel$ alla retta.

Domande ① Data una descrizione geometrica, trovare l'espressione analitica

② Data l'espressione analitica, capire geometricamente di cosa si tratta (e capire prima se si tratta di isometria.)

Come capisco se si tratta di isometria? Guardo se la matrice è ortogonale (righe o colonne devono essere base ortonorm.)

Risposta a ② : cerco i p.ti fissi e guardo gli autovalori della matrice.

Dai p.ti fissi

→ nei casi 1 e 2 ho finito

→ nel caso 3 gli autovalori della matrice sono ± 1 , e poi $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, e α è l'angolo di rotazione

→ nel caso 4 devo stabilire chi sono retta e piano.

Gli autovalori della matrice sono -1 e poi $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$.

Allora

- la retta di rotazione è quella che passa per il p.to fisso e ha come direzione quella dell'autovettore di -1
- il piano è quello $\perp$ alla retta che passano per il p.to fisso.

→ Nel caso **5** guardiamo gli autovettori della matrice.

Tra questi c'è di sicuro $\lambda = 1$. Guardo $ug(1)$, che può essere 1, 2, 3

- Se $u_g(1) = 3$, allora $A = Id$ e siamo nel caso 3.1
- Se $u_g(1) = 2$, allora l'altro è per forza -1 , quindi A è matrice di simmetria e siamo nel 3.2
- Se $u_g(1) = 1$, allora gli altri sono $\cos \alpha \neq \pm 1$ sicché (questo contiene anche il caso $\alpha = 180^\circ$ in cui diventano -1), ma in ogni caso siamo nel 5.3

Oss. Se $\det(A) = 1$, i casi possibili sono:

1 3 5.1 5.3

Se $\text{Det}(A) = -1$, i casi possibili sono:

2 4 5.2

Strategia per domanda ① : spostare l'origine in un p.to opportuno e poi risolvere il pbn. risp. all'origine

Esempio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano $x=6$

Considero $P_0 \in \text{piano}$, ad esempio $(6, 0, 0)$

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ simmetria rispetto a $x=0$, cioè al piano yz
 $\rightsquigarrow$ aggiungo P_0

Simmetria rispetto piano yz : $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$

Come matrice è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\left. \begin{aligned} Ae_1 &= -e_1 \\ Ae_2 &= e_2 \\ Ae_3 &= e_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &e_1 \text{ è } \perp \text{ al piano e va in} \\ &\quad \text{se stesso} \\ &\text{stanno nel piano } yz \text{ e} \\ &\text{vanno in se stessi} \end{aligned}$$

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x-6, y, z) \rightsquigarrow (-x+6, y, z) \rightsquigarrow (-x+12, y, z)$$

$\uparrow$ $P-P_0$ $\uparrow$ simmetria $\uparrow$ aggiungo P_0

Espressione finale $f(x, y, z) = (-x+12, y, z)$

Verifica: cerco i p.ti fissi

$$-x+12 = x \rightsquigarrow x=6$$

$$\left. \begin{array}{l} y = y \\ z = z \end{array} \right\} \begin{array}{l} y \text{ e } z \text{ sono variabili} \\ \text{libere} \end{array}$$

Poi si scrive le soluzioni come

$$(x, y, z) = (6, t, s) = (6, 0, 0) + t(0, 1, 0) + s(0, 0, 1)$$

Esempio 2 Scrivere la rotazione di 90° intorno alla retta

$$x=2, y=3$$

$\uparrow$
orizz. risp. ad un semiasse in piedi
lungo semiasse positivo delle z

Nota bene: la retta la posso descrivere come $(2, 3, 0) + t(0, 0, 1)$

Rotazione intorno all'asse z

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \theta = -90^\circ$$

Nel vostro caso $P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow R(P-P_0) \rightsquigarrow R(P-P_0)+P_0$

$\uparrow$
p.to qualunque
della retta, ad esempio $(2, 3, 0)$

$$(x, y, z) \rightarrow (x-2, y-3, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-3 \\ -x+2 \\ z \end{pmatrix}$$

aggiungo P_0

$$\rightsquigarrow \boxed{(y-1, -x+5, z)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{P.ti fissi} \\ y-1 = x \\ -x+5 = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=2 \text{ e } y=3 \\ z=z \end{array}$$