

ISOMETRIE NELLO SPAZIO

Proprietà matrici ortogonali in ogni dimensione

- ① $A^{-1} = A^t$ (una delle 3 possibili definizioni)
- ② $\text{Det}(A) = \pm 1$ (conseguenza di $AA^t = \text{Id}$ e teo. Binet)

- ③ conservano norma e prod. scalare, cioè

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \text{e} \quad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

- ④ se A manda un certo s.sp. V in se stesso, allora A manda anche $V^\perp$ in se stesso

[Questo segue dalla ③. Infatti, sia $w \in V^\perp$, cioè $\langle w, v \rangle = 0$ per ogni $v \in V$. Ma allora anche $\langle Aw, Av \rangle = 0$
 $\downarrow$

e per concludere ci basta sapere che ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come $A\hat{v}$ per un certo $\hat{v} \in V$. Questo segue dal fatto che le matrici ortogonali sono iniettive e surgettive, avendo $\text{Det} \neq 0$]

- ⑤ Gli unici possibili autovalori reali di una matrice ortogonale sono ± 1 .

[Infatti, se $Av = \lambda v$, allora per la proprietà 3 deve essere

$$\|Av\| = \|v\|$$

$$|\lambda| \cdot \|v\| \quad \leadsto \quad |\lambda| = 1 \quad \leadsto \quad \lambda = \pm 1 \quad]$$

- ⑥ In modo quasi analogo si potrebbe vedere che gli eventuali autovalori complessi sono di modulo 1, quindi del tipo

$$\cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

[Dimostrazione analoga alla precedente, solo usando autovettori complessi]

— o — o —

ISOMETRIE LINEARI DI $\mathbb{R}^3$

$$f(x) = Ax$$

↑
matrice 3×3 ortogonale

[In $\mathbb{R}^2$ c'erano solo rotazioni e simmetrie, a seconda del $\det$]

Le tipologie sono

- L'identità
- Simmetrie rispetto ad un piano
- Rotazioni intorno ad una retta
- Rotazioni intorno ad una retta seguite da simmetria rispetto al piano (per l'origine) perpendicolare alla retta

Fatto 1 Almeno un autovalore reale c'è!

(Il pol. caratter. ha grado 3, ed i polinomi di grado dispari hanno almeno una radice reale)

A questo punto si aprono 2 scenari

Primo scenario Solo autovalori reali

- $+1, +1, +1$ $\leadsto$ identità
- $+1, +1, -1$ $\leadsto$ simmetria rispetto all'autospazio di 1
- $+1, -1, -1$ $\leadsto$ rotazione di 180° intorno alla retta "autosp. di 1"
- $-1, -1, -1$ $\leadsto$ -identità, che posso pensare come rotazione di 180° intorno ad una retta, facendo poi simmetria rispetto piano perpendicolare

Secondo scenario Un autovalore reale e 2 complessi coniugati

- Se quello reale è $+1$, allora c'è una retta che resta fissa, e allora per la proprietà ④ anche il piano $\perp$ alla retta va in se, e quindi in quel piano abbiamo una isometria senza autovalori reali, quindi una rotazione
- Se quello reale è -1 , allora c'è una retta che va in meno se stessa, e nel piano $\perp$ è una rotazione.

Esempio 1 Consideriamo $f(x, y, z) = (-z, -y, x)$

Quale matrice la rappresenta?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

A = matrice ortogonale
(righe e/o colonne ortonormali)

$\leadsto$ è una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$. Di cosa si tratta?

$\det(A) = -1 \Rightarrow$ dalla classificazione restano 3 possibilità

$\rightarrow$ -identità (e non lo è)

$\rightarrow$ simmetria risp. piano (ma la traccia sarebbe 1)

$\rightarrow$ rotazione seguita da simmetria

Calcoliamo gli autovalori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2(-1-\lambda) + (-1-\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2+1)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\lambda = -1$ $\lambda = \pm i$

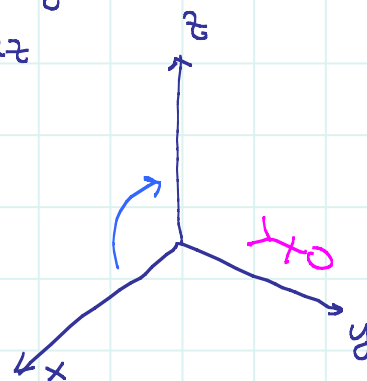
Quindi abbiamo una rotazione di 90° rispetto alla retta generata da un autovettore di -1 .

Si vede a occhio che un autovettore di -1 è $(0, 1, 0)$

Quindi abbiamo: rotazione di 90° rispetto all'asse y
seguita da simm. risp. piano xz

Resta da precisare il verso di rotazione

Dato che $(1, 0, 0) \leadsto (0, 0, 1)$ il verso è quello in figura, cioè orario per un osservatore in piedi lungo asse y positivo



Esempio 2

$$f(x, y, z) = (z, x, y)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice ortogonale

$\det(A) = 1$. Ci sono tante possibilità

→ identità → NO

→ autov. $+1, -1, -1$ → NO (traccia = 0)

→ resta una rotazione rispetto ad una retta.

Quale retta? L'autospazio dell'autovalore 1, generato da $(1, 1, 1)$

Di quanto stiamo ruotando?

Gli autovalori sono

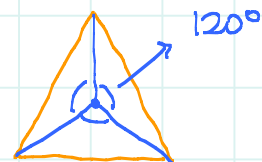
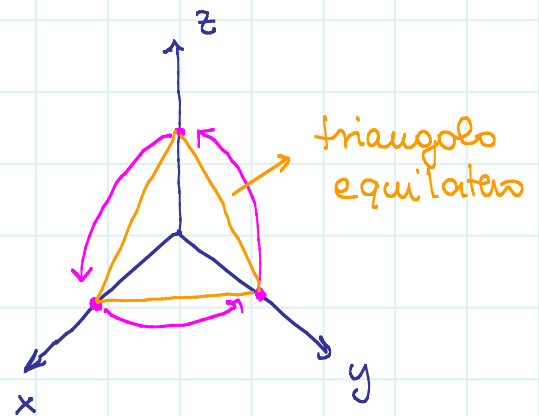
$$+1$$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$\text{Ma allora traccia} = 1 + 2\cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\leadsto \alpha = 120^\circ$$



— o — o —