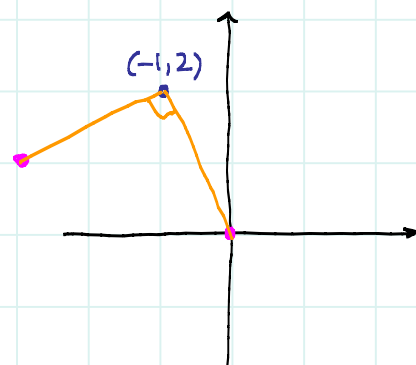


Esercizio 1 Scrivere la rotazione di 90° in verso orario rispetto al punto $(-1, 2)$
 P_0



Strategia generale:

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotazione}}}{A} (P - P_0) \rightsquigarrow A (P - P_0) + P_0$$

In coordinate

$$(x, y) \rightarrow (x+1, y-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2 \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
 $\theta = -90^\circ$

$$\rightsquigarrow (y-3, -x+1)$$

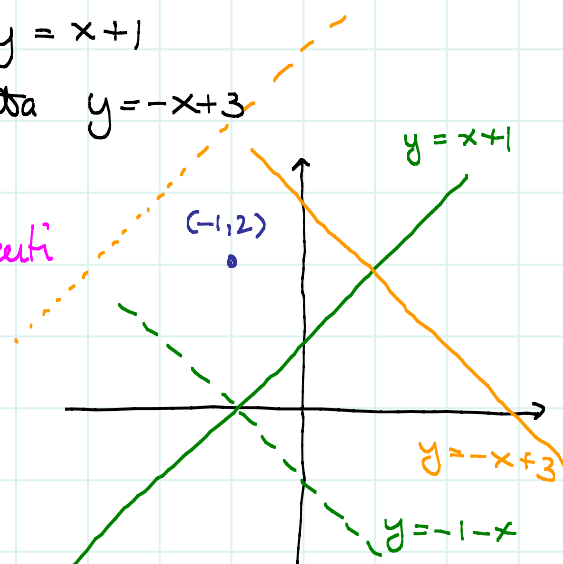
Quindi $f(x, y) = (y-3, -x+1)$ [Verifica: $f(-1, 2) = (-1, 2) \quad \checkmark$
 $f(0, 0) = (-3, 1) \quad \checkmark$]

Domande successive

→ Determinare l'immagine della retta $y = x+1$

→ Determinare la controimmagine della retta $y = -x+3$

SLOGAN: le parametriche vanno bene in avanti
 le cartesiane vanno bene indietro



Prima domanda

Metodo banale: prendo due punti A e B sulla retta data, calcolo $f(A)$ e $f(B)$, poi scrivo la retta per $f(A)$ e $f(B)$

Metodo alternativo: scrivo una rapp. parametrica della retta data

$$(0, 1) + t(1, 1) = (t, 1+t)$$

Sostituisco nella funzione f

$$f(t, 1+t) = (1+t-3, -t+1) = (-2+t, 1-t)$$

Quella che abbiamo ottenuto è la parametrica dell'immagine.

Se voglio la cartesiana, la ricavo

$$x = -2+t \quad \leadsto \quad t = x+2 \quad \leadsto \quad y = 1-x-2 = -1-x$$

$$y = 1-t$$

Seconda domanda

Metodo bonino: prendo due punti A e B sulla retta data

cerco C e D tali che $f(C) = A$ e $f(D) = B$

calcolo la retta per C e D.

Metodo alternativo: considero la cartesiana data $y = -x+3$

al posto di x e y sostituisco le due comp. della

$$\text{funzione } f(x, y) = (y-3, -x+1)$$

$$-x+1 = -(y-3)+3 \quad \leadsto \quad -x+1 = -y+6 \quad \leadsto \quad y = x+5$$

Oss. Quando abbiamo, in qualunque dimensione, una trasformazione del tipo

$$f(x) = Ax+b$$

allora l'IMMAGINE di una retta

$$P_0 + t v$$

è la retta

il vettore "velocità" si
trasforma con la
sola matrice

$$f(P_0 + t v) = A(P_0 + t v) + b = (AP_0 + b) + t Av$$

↑ il punto base usa tutta la trasfor.

Altra domanda: determinare l'immagine della circ. di equazione
 $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 22$

Idea: $\rightarrow$ il raggio resta lo stesso (è una isometria)
 $\rightarrow$ basta vedere dove va a finire il centro

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 22 \quad ; \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 22 + 4 + 9$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 35$$

Centro: $(2, -3)$ Raggio: $\sqrt{35}$

$\downarrow$ applico φ

$(-6, -1) \leftarrow$ nuovo centro

La nuova equazione è $(x+6)^2 + (y+1)^2 = 35$

$$x^2 + 12x + y^2 + 2y + 2 = 0$$

Se dovevo fare la centroimmagine il discorso era analogo.

Esercizio 2 Che cosa si ottiene facendo

$\rightarrow$ prima la simmetria rispetto alla retta $y = x + 3$

$\rightarrow$ poi la simmetria rispetto alla retta $2x + 3y = 5$?

Risposta: si ottiene la rotazione rispetto al p.to di intersezione, che in questo caso esiste

La prima trasf. è $f_1(x) = A_1 x + b_1$

La seconda " " $f_2(x) = A_2 x + b_2$

Componendo:

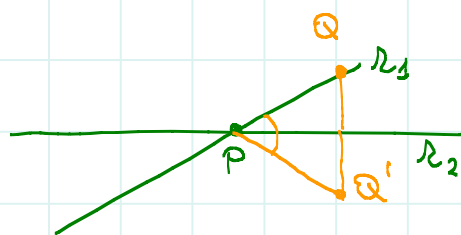
$$f_2(f_1(x)) = \underbrace{A_2 A_1}_{A_3} x + \underbrace{A_2 b_1 + b_2}_{b_3}$$

Ora A_1 e A_2 hanno $\text{Det} = -1$ (matrici di simmetria), quindi $\text{Det}(A_3) = 1$, quindi A_3 è una matrice di rotazione.

Il p.to di intersezione delle due rette resta fisso, quindi la rotazione è intorno a quel p.to.

Di quale angolo stiamo ruotando?

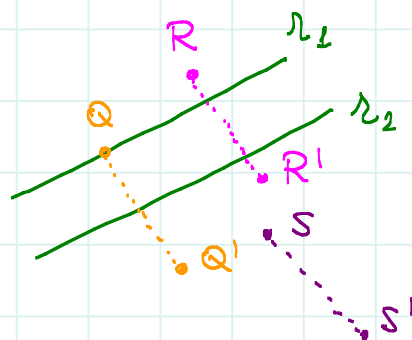
Due volte l'angolo compreso tra le 2 rette!



Esercizio 3 Cosa si ottiene componendo due simmetrie rispetto a due rette parallele?

In questo caso A_3 è la matrice identica, quindi la composizione è una traslazione. Si può vedere che $b_3 = 0$ se e solo se le due rette $\parallel$ sono in realtà la stessa.

Di che cosa sto traslando? In che direzione?



Scego Q su r_1

→ Al primo colpo resta fisso

→ Al secondo colpo trasla di 2 volte la distanza tra r_1 ed r_2 , il tutto $\perp$ alle due rette.

Il punto R finirà in R' con $R' - R = Q' - Q = \text{"b della traslazione"}$
— o — o —