

CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE NEL PIANO

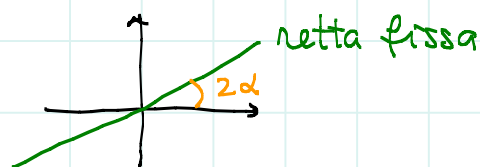
Caso lineare Se in aggiunta $f(0) = 0$, allora ci sono solo 2 casi

→ rotazione di angolo α risp. all'origine (compreso il caso $\alpha = 0$)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ANTIORARIA}$$

→ simmetria rispetto ad una retta che passa per l'origine

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$



Caso generale $f(x) = Ax + b$ con potenzialmente $b \neq 0$.

Le isometrie si classificano bene sulla base dei punti fissi, cioè le soluzioni di $f(x) = x$, cioè

$$Ax + b = x \quad \leadsto \quad (A - Id)x = -b$$

sistema lineare

Abbiamo varie possibilità

[1] P.ti fissi = tutto $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f(x) = \text{Identità}$ ($f(x) = x$ per ogni x)

[2] P.ti fissi = una retta $\Rightarrow f(x) = \text{simmetria rispetto alla retta}$

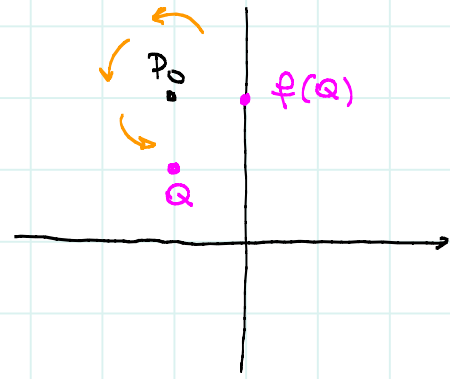
[3] Un unico p.to fisso $\Rightarrow f(x) = \text{rotazione intorno al p.to.}$

[4] Nessun p.to fisso [4.1] Traslazione $\Rightarrow f(x) = x + b$ con $b \neq 0$

[4.2] Simmetria + traslazione parallela alla retta

Esempio 1 Scrivere la rotazione di 90° in senso antiorario rispetto al punto $(-1, 2)$.

$$P \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{sposto} \\ \text{origine in} \\ P_0}]{ } P - P_0 \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{ruoto} \\ \text{con la} \\ \text{matrice}}]{ } Ruoto(P - P_0) \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{riporto} \\ \text{l'origine al suo} \\ \text{posto}}]{ } Ruoto(P - P_0) + P_0$$



$$(x, y) \rightarrow (x+1, y-2) \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{R \text{ con} \\ \alpha = 90^\circ}} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+2 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (-y+1, x+3)$$

$$\text{Quindi } f(x, y) = (-y+1, x+3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Verifiche: $f(-1, 2) = (-1, 2)$ ok
 $f(Q) = f(-1, 1) = (0, 2)$ ☺

Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $y = 3x$

Prendo base ortogonale con v_1 lungo la retta

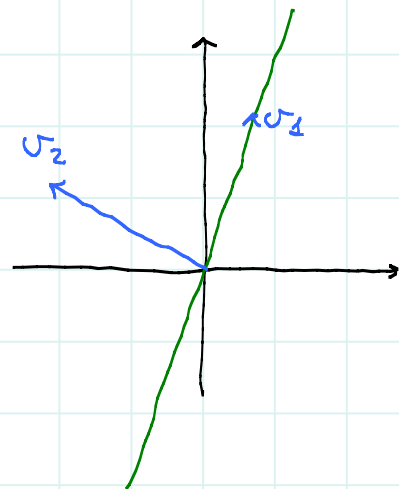
$$v_1 = (1, 3) \quad v_2 = (-3, 1)$$

La simmetria verifica

$$f(v_1) = v_1 \quad f(v_2) = -v_2$$

Nella base v_1, v_2 la matrice sarebbe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Non resta che cambiare base



$$f(x) = Ax \quad \text{con} \quad A = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^{-1} \quad \text{e} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

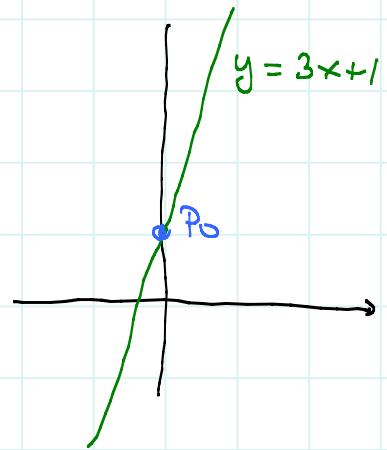
↑
dalla v_1, v_2 alla
canonica

Fare il conto per esercizio

Esempio 3 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $y = 3x + 1$

$$P \rightarrow P - P_0 \rightarrow A(P - P_0) \rightarrow A(P - P_0) + P_0$$

dove A è la matrice dell'esercizio precedente.



— o — o —
Perché la classificazione funziona?

[1] Tutti i p.ti sono fissi $\leadsto$ ovvio che $f(x) = x$ per ogni x

[2] I p.ti fissi sono una retta $(A - Id)x = -b$ ha come soluzione una retta

$\Rightarrow$ La matrice $A - Id$ ha $\text{Det} = 0$ e $\ker$ di dim 1, quindi 1 è autovalore della matrice, quindi l'altro autovalore è -1 (il Det è ± 1 , essendo ortogonale, e l'altro autov non può essere 1 perché il $\ker$ avrebbe dim 2)

Quindi A è una matrice di simmetria.

Sia x_0 un p.to fisso, cioè $Ax_0 + b = x_0$.

Allora

$$x \rightarrow x - x_0 \xrightarrow[\uparrow \text{simmetria}]{} A(x - x_0) \rightarrow A(x - x_0) + x_0 = Ax - \underbrace{Ax_0 + x_0}_b$$

[3] C'è un unico p.to fisso x_0

Allora $A - Id$ è invertibile, quindi A non ha l'autovalore 1, quindi non è matrice di simmetria, ma allora è matrice di rotazione con $\alpha \neq 0$. Dico che $f(x)$ è la rotazione intorno a x_0 di angolo α :

$$x \rightarrow x - x_0 \rightarrow A(x - x_0) \rightarrow A(x - x_0) + x_0 = Ax + b$$

↑
not.

[4] Non ci sono pti fissi

$$(A - Id)x = -b \Rightarrow A - Id \text{ non invertibile, quindi } \det = 0$$

quindi 0 è autovalore di $A - Id$.

Ci sono 2 possibilità

[4.1] $mg(0) = 2 \Rightarrow$ è tutto ker $\Rightarrow A = Id \Rightarrow f(x) = x + b$

[4.2] $mg(0) = 1 \Rightarrow$ L'autovalore 1 ha molteplicità 1 per A ,
quindi A è una matrice di simmetria,
quindi $\text{Rango}(A - Id) = 1$,
quindi se non c'è soluzione b non deve
stare nell'immagine di $(A - Id)$. Ma
l'immagine ha dimensione 1, quindi posso
scrivere

$$b = b_1 + b_2 \leftarrow \begin{matrix} \text{NON sta nell'immagine} \\ \uparrow \\ \text{sta nell'immagine} \end{matrix}$$

[To be completed]

Esempio $f(x, y) = (-x + 12, -y + 8)$ che cos'è questa?

Guarda i pti fissi !! $\begin{cases} -x + 12 = x \\ -y + 8 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 12 \\ 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$

Per forza è una rotazione intorno a $(6, 4)$.

Di che angolo?

La matrice è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 180^\circ$$

Oraria o antioraria? È lo stesso

Oss. Rotazione di $180^\circ =$ simmetria centrale

