

ISOMETRIE

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice ISOMETRIA se conserva le distanze, cioè

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Teorema (Struttura delle isometrie)

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometria. Allora

$$f(x) = Ax + b$$

con A matrice ortogonale.

Oss. preliminare Le matrici ortogonali conservano la norma ed il prodotto scalare (quello classico), cioè

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Dim $\langle Ax, Ay \rangle = (Ay)^t Ax = y^t \underbrace{A^t A}_{\text{Id}} x = y^t x = \langle x, y \rangle$

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

↑
def. di
norma

— o — o —

Dim. teo. struttura

Step 1 (Parte facile) Se $f(x) = Ax + b$, con A ortogonale, allora $f(x)$ conserva le distanze. Infatti

$$\begin{aligned}\text{dist}(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| \\ &= \|Ax + b - Ay - b\| \\ &= \|Ax - Ay\| \\ &= \|A(x - y)\| \\ &= \|x - y\|\end{aligned}$$

↑
visto prima che A conserva la norma

Step 2 Se f conserva le distanze, e in aggiunta $f(0) = 0$, allora f conserva le norme. Infatti

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= \text{dist}(f(x), 0) \\ &= \text{dist}(f(x), f(0)) \\ &= \text{dist}(x, 0) \\ &= \|x\|\end{aligned}$$

f isometrica

Step 3 Se f conserva le distanze, e in aggiunta $f(0) = 0$, allora f conserva i prodotti scalari. Infatti

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|^2 &= \text{dist}(f(x), f(y))^2 \\ &= \text{dist}(x, y)^2 \\ &= \|x - y\|^2\end{aligned}$$

Espandendo i quadrati:

$$\underbrace{\|f(x)\|^2}_{\|x\|^2} + \underbrace{\|f(y)\|^2}_{\|y\|^2} - 2\langle f(x), f(y) \rangle = \underbrace{\|x\|^2}_{\|x\|^2} + \underbrace{\|y\|^2}_{\|y\|^2} - 2\langle x, y \rangle$$

poiché f conserva la norma

Semplificando

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Step 4 Se f conserva le distanze, e in aggiunta $f(0)=0$, allora f è lineare ed è rappresentata da una matrice ortogonale

Consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^n$: $e_1, \dots, e_n$.

Poniamo

$$\hat{e}_1 = f(e_1), \dots, \hat{e}_n = f(e_n)$$

Allora i vettori $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ sono ortonormali. Infatti

$$\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$\uparrow$
 f conserva i prod. scalari

Prendiamo un qualunque $x = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$.

La sua immagine sarà $f(x) = \hat{c}_1 \hat{e}_1 + \dots + \hat{c}_n \hat{e}_n$

(occhio: non sto dicendo che $f(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) = c_1 f(e_1) + \dots + c_n f(e_n)$ perché sto usando che f è LINEARE)

Per concludere mi serve che $\hat{c}_i = c_i$ per $i = 1, \dots, n$

Ma le componenti rispetto ad una base ortonormale sono prodotti scalari, e quindi

$$\hat{c}_i = \langle f(x), \hat{e}_i \rangle = \langle f(x), f(e_i) \rangle = \langle x, e_i \rangle = c_i \quad \because$$

$\uparrow$
 f conserva il prod. scalare

Questo dimostra che f è lineare, cioè $f(x) = Ax$ per una certa matrice A . Le colonne di A sono $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ ed essendo questi ortonormali, la matrice è per forza ortogonale.

Step 5 Caso generale. Se f conserva le distanze, allora

$$g(x) = f(x) - f(0)$$

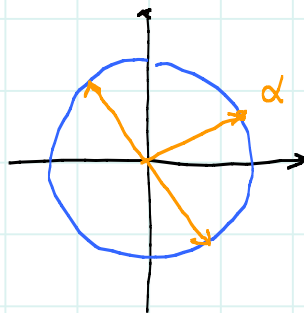
conserva le distanze e verifica $g(0) = 0$, quindi $g(x) = Ax$ con A ortogonale. Ma allora

$$f(x) = g(x) + f(0) = Ax + \underbrace{f(0)}_b$$

— o — o —

ISOMETRIE DEL PIANO

Come sono fatte le matrici ortogonali nel piano?



$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = S$$

La matrice R ha

$$\rightarrow \det = 1$$

$\rightarrow$ autovalori

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (\cos \alpha - \lambda)^2 + \sin^2 \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow (\cos \alpha - \lambda)^2 = -\sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha - \lambda = \pm i \sin \alpha$$

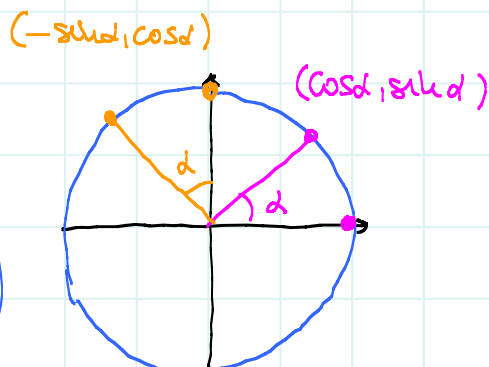
$$\Leftrightarrow \lambda = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

Gli autovalori sono $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$ (due numeri complessi coniugati di modulo 1)

$$\rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$



R = rotazione di angolo α in senso antiorario

La matrice S ha

→ $\det = -1$ e $\text{Tr} = 0$

→ Autovalori = $+1$ e -1

→ è pure simmetrica

→ quindi esiste una base ortonormale u_1, u_2 di $\mathbb{R}^2$ t.c.

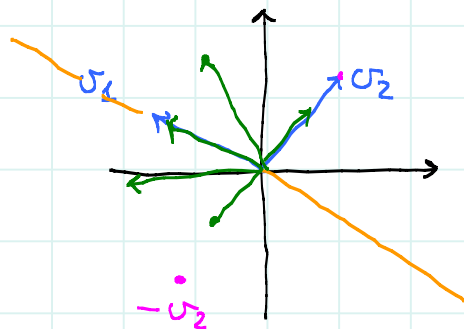
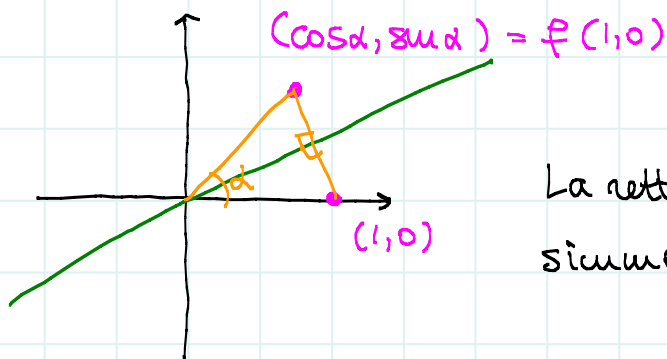
$$Au_1 = u_1$$

$$Au_2 = -u_2$$

Si tratta quindi della SIMMETRIA rispetto alla retta $\text{Span}(u_1)$

Che cosa rappresenta α ?

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$



La retta rispetto a cui abbiamo fatto la simmetria forma con l'asse x un angolo $\frac{\alpha}{2}$.

Esercizio Scrivere la rotazione di 90° in verso ORARIO rispetto all'origine.

1° modo Osserviamo $f(1,0) = (0,-1)$ e $f(0,1) = (1,0)$.

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $f(x,y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, -x)$

2° modo Ruotare di 90° in senso orario = ruotare di 270° in senso antiorario. Ora uso R con $\alpha = 270^\circ$

— o — o —