

- Polinomio minimo
- Teorema di HAMILTON-CAYLEY
- Alcune conseguenze

Dato un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

e data A matrice quadrata $n \times n$, ha senso calcolare $p(A)$ nel senso

$$p(A) = a_0 \underset{\text{Id}}{A^0} + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k$$

Il risultato è una matrice $n \times n$.

Domande ① Data una matrice quadrata A , esiste un polinomio non banale per cui $p(A) = 0$
↑ matrice nulla

② Se la prima risposta è sì, come sono fatti tutti i polinomi con quella proprietà?

Risposta ① : SI

Versione facile Consideriamo le matrici

$$\text{Id}, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$$

Queste sono $n^2 + 1$ matrici. Lo spazio delle matrici $n \times n$ ha dim n^2 .

Ma allora le potenze scritte sopra sono lin. dip., dunque

$$c_0 \text{Id} + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$$

per una opportuna scelta dei c_i , non tutti nulli.

Abbiamo così ottenuto un pol. di grado $\leq n^2$ tale che $p(A) = 0$.

Teorema (H-C) (risposta a ① in versione difficile)

Se $p(x)$ è il polinomio caratteristico di A , allora $p(A) = 0$

(Quindi esiste almeno un polinomio di grado n che annulla A)

Esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A$

$\text{Tr} = 3 \quad \text{Det} = 2 \quad \leadsto \text{autovalori} : 1, 2$

Pol. caratt. = $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

Quindi deve succedere che

$$A^2 - 3A + 2\text{Id} = 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2\text{Id} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{☺}$$

Prendiamo la relazione $A^2 - 3A + 2\text{Id} = 0$ e moltiplichiamo per A^{-1} (che sappiamo esistere poiché $\text{Det} \neq 0$)

Otteniamo

$$A - 3\text{Id} + 2A^{-1} = 0$$

cioè

$$2A^{-1} = 3\text{Id} - A \quad \leadsto \quad A^{-1} = \frac{3}{2}\text{Id} - \frac{1}{2}A$$

In questo modo possiamo SEMPRE calcolare A^{-1} facendo solo potenze di A .

NON DIMOSTRAZIONE DI H-C $p(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda\text{Id})$

Sostituisco $\lambda = A \leadsto p(A) = \text{Det}(A - A) = 0$

[Se questa dimostrazione funzionasse, varrebbe la stessa cosa anche con la traccia]

Caso facile di H-C Caso in cui A è diagonalizzabile, cioè esiste una base di autovettori.

Siano $v_1, \dots, v_n$ tali che $Av_i = \lambda_i v_i$.

Quanto fa $A^2 v_i$? $\leadsto A^2 v_i = \lambda_i^2 v_i$

$$A^3 v_i = \lambda_i^3 v_i$$

e quindi

$$\underbrace{[p(A)](v_i)}_{\substack{\text{matrice ottenuta} \\ \text{sostituendo } A \\ \text{al posto di } x \text{ o } \lambda \\ \text{nel polinomio}}} = p(\lambda_i) v_i$$

$\downarrow$
 $= 0$ se p è il pol. caratteristico e λ_i è autovalore

Questo ci dice che $[p(A)](v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
quindi la matrice $p(A)$, applicata alla base $v_1, \dots, v_n$ fa venire sempre 0, quindi è tutto Ker, quindi $p(A)$ è la matrice nulla.

— 0 — 0 — 0 —

Risposta ② Un tes. misterioso dice che tutti i polinomi con quella proprietà sono multipli di un polinomio di grado, chiamato **POLINOMIO MINIMO** di A .

Il polinomio minimo ha queste proprietà

→ è un divisore del polinomio caratteristico (ovvio dal fatto prec.)

→ ha le stesse radici del polinomio caratteristico, eventualmente con molteplicità più piccola (ma sempre almeno 1)

(quindi se le radici del caratt. avevano tutte molt. alg. = 1, allora pol. min. = pol. caratt.)

→ pensando a Jordan, la molt. con cui ogni radice compare nel pol. minimo è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a quella radice

Esempio

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^5$$

$$p_m(\lambda) = (\lambda - 3)^3 \uparrow \text{il pi\`u grande blocco \`e da 3}$$

$\uparrow$
minimo

Come pu\`o essere la forma canonico di A?

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

0

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

0

Cosa possiamo guardare per decidere?

Se $\text{mg}(3) = 2 \rightsquigarrow 1^\circ \text{ caso}$

($\text{mg}(\lambda) = \# \text{ blocchi relativi a } \lambda$)

Se $\text{mg}(3) = 3 \rightsquigarrow 2^\circ \text{ caso}$

Esempio Come sono fatte tutte le matrici 25×25 tali che

$$A^2 = 3A$$

Risolviamo come $A^2 - 3A = 0$, quindi $q(x) = x^2 - 3x$ annulla la matrice A. Quindi $x^2 - 3x$ \`e un multiplo del pol. minimo  $p_m(A)$ . Chi pu\`o essere $p_m(A)$? $x^2 - 3x = x(x-3)$

- Il polinomio $p_m(x) = x \rightsquigarrow A = 0 \rightsquigarrow A = \text{matrice nulla}$
- Il polinomio $p_m(x) = x - 3 \rightsquigarrow A - 3Id = 0 \rightsquigarrow A = 3Id$
- Il polinomio $p_m(x) = x^2 - 3x$.

Come sar\`a fatto il caratteristico? $p(x) = x^a(x-3)^b$
dove a e b sono almeno 1 e $a+b=25$.

Quindi gli autovalori di A saranno

$\lambda = 0$ con $m_a(0) = a = \text{mg}(0)$ (i blocchi sono tutti da 1)

$\lambda = 3$ con $m_a(3) = b = \text{mg}(3)$ (i blocchi sono tutti da 1)

Quindi alla fine la forma canonica di A è diagonale
con a volte 0 e b volte 3 sulla diagonale.

Dalla forma canonica risalgo alla matrice originaria con il
cambio di base

$$A = M^{-1} D M$$

↑
diagonale con solo
0 e 3 sulla diagonale

— 0 — 0 —